Orsay

n° d'ordre : 3.149

THESE

PRÉSENTÉE

A L'UNIVERSITE DE PARIS-SUD

CENTRE D'ORSAY

POUR OBTENIR

LE TITRE DE DOCTEUR TROISIEME CYCLE

SPÉCIALITÉ : PHYSIQUE DES GAZ ET DES PLASMAS

PAR

GILLES MAYNARD

SUJET : FREINAGE D'IONS NON RELATIVISTES DANS UN PLASMA CHAUD ET DENSE

SOUTENUE LE 27 JANVIER 1982 DEVANT LA COMMISSION D'EXAMEN

MM. DELCROIX, PRÉSIDENT

DEI-CAS

DEUTSCH

DOUCET

WEIS

Orsay

n° d'ordre : 3.149

THESE

PRÉSENTÉE

A L'UNIVERSITE DE PARIS-SUD

CENTRE D'ORSAY

POUR OBTENIR

LE TITRE DE DOCTEUR TROISIEME CYCLE

Spécialité : Physique des Gaz et des Plasmas

PAR

Gilles MAYNARD

Sujet : FREINAGE D'IONS NON RELATIVISTES DANS UN PLASMA CHAUD ET DENSE

Soutenue le 27 Janvier 1982 devant la Commission d'Examen

MM. DELCROIX, Président

DEI-CAS

DEUTSCH

DOUCET

WEIS

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Cette thèse a été préparée dans le Laboratoire de Physique des Gaz et des Plasmas dont le Directeur, Monsieur le Professeur J.L. DELCROIX, a accepté de présider le jury; je l'en remercie.

J'exprime également toute ma reconnaissance à Messieurs R. DEI-CAS, H.J. DOUCET, J.J. WEIS qui m'ont fait l'honneur de participer à ce jury.

Je tiens à exprimer à Monsieur C. DEUTSCH, qui a dirigé ce travail, ma profonde gratitude pour son aide importante.

Je remercie également Monsieur H. MINOO pour sa précieuse collaboration.

Il me reste à remercier Mesdames M. DURAND et V. SOKOLOVSKY pour le soin apporté à la présentation matérielle de ce mémoire.

SOMMAIRE

INTRODUCTION 1

NOTATIONS 3

CHAPITRE I : QUELQUES ORDRES DE GRANDEURS DANS LA FUSION INERTIELLE PAR FAISCEAUX D'IONS 5

CHAPITRE II : EXPRESSION DU POUVOIR D'ARRET DANS UN PLASMA ... 8

II.1. INTRODUCTION 8

II.2. EXPRESSION DU POUVOIR D'ARRET A L'AIDE DES EQUATIONS DE MAXWELL 9

CHAPITRE III : FONCTION DIELECTRIQUE A.P.A. POUR UN FLUIDE D'ELECTRONS HOMOGENE 15

III.1. INTRODUCTION 15

III.2. DOMAINES DE VALIDITE DE L'A.P.A 15

III.3. RESULTATS DE C.GOUEDARD 17

III.3.a. Dégénérescence quelconque 17

III.3.b. Limite basse température 20

III.3.c. Limite haute température 21

III.3.d. Calcul de $\varepsilon(q,\omega)$ à dégénérescence quelconque 26

III.4. RELATION DE DISPERSION 29

CHAPITRE IV : CALCUL DE LA CONTRIBUTION DES ELECTRONS LIBRES DANS LE POUVOIR D'ARRÊT 32

IV.1. POSITION DU PROBLEME 32

IV.2. PRECISIONS SUR LE CALCUL 33

IV.3. VARIATION DE L'INTEGRANT 35

IV.4. CONTRIBUTION DE LA RESONANCE 37

IV.5. LIMITE DU POUVOIR D'ARRET LORSQUE $v << v_{THe}$ 41

IV.6. LIMITE DU POUVOIR D'ARRET LORSQUE $v >> v_{THe}$ 43
IV.6.a. Résonance 44
IV.6.b. Chocs proches 45
IV.7. VARIATION DU POUVOIR D'ARRET AVEC T_e et N_e 47
IV.8. PARCOURS 49
IV.9. DUREE DU PARCOURS 50

CHAPITRE V : DISPERSION EN ENERGIE 51

V.1. INTRODUCTION 51
V.2. EXPRESSION DE LA DISPERSION EN ENERGIE 51
V.3. VARIATION DE L'INTEGRANT ET LIMITE $v << v_{THe}$ 53
V.4. LIMITE GRANDE VITESSE 56
V.4.a. Partie résonnante 56
V.4.b. Partie chocs proches 57
V.5. DISPERSION EN ENERGIE INTEGREE SUR UN PARCOURS 58

CHAPITRE VI : CONTRIBUTIONS DES IONS DU PLASMA 60

VI.1. DESCRIPTION DU PLASMA 60
VI.2. FREINAGE PAR LES ELECTRONS DU PLASMA 61
VI.3. EXEMPLE 63
VI.4. FREINAGE PAR LES IONS DU PLASMA 64

CHAPITRE VII : AMELIORATION DE LA DESCRIPTION DE L'INTERACTION ION-PLASMA 67

APPENDICE A : DETERMINATION DU TERME DOMINANT DANS LE DEVELOPPEMENT DE $1(v)$ 69

CHAPITRE VIII : FREINAGE D'UN ION A GRANDE DISTANCE PAR LES ELECTRONS LIES D'UN ATOME 73

VIII.1. INTRODUCTION 73
VIII.2. EXPRESSION DU FREINAGE PAR UN OSCILLATEUR 73
VIII.3. CALCUL DE $\left(\frac{dE^i}{dx}\right)_\omega$ 75
VIII.4. SOMME SUR LES OSCILLATEURS 78
VIII.5. MODELE STATISTIQUE DE L'ATOME 80

VIII.6. RESULTATS.....82
VIII.7. CONTRIBUTIONS DES CHOCS PROCHES.....85
VIII.8. CONCLUSION DU CHAPITRE.....86

APPENDICE B : QUELQUES PROPRIETES DES FONCTIONS DE BESSEL $I_\nu(z)$ ET $K_\nu(z)$ [26].....87

APPENDICE C : DETERMINATION DE $I(\xi)$.....89

CONCLUSION.....92

BIBLIOGRAPHIE.....94

* *
*

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41547326_0022

INTRODUCTION

L'approximation la plus souvent utilisée pour l'étude de l'interaction d'un ion incident avec un plasma consiste à négliger l'interaction entre différentes composantes du plasma pour calculer la force agissant sur l'ion incident.

Ainsi, pour calculer la dérivée de l'énergie d'un ion incident par rapport à la distance parcourue (appelée pouvoir d'arrêt), nous posons :

$$\frac{dE}{dx} = \sum_i \alpha_i + \sum_i \beta_i + \gamma$$

Avec : γ = action des électrons libres du plasma

β_i = action des électrons liés des atomes, ou ions, de l'espèce i

α_i = action des noyaux des atomes, ou ions, d'espèces i

Une grande partie du travail présenté ici (chapitres II à V) concerne l'étude de γ en calculant, pour un grand nombre d'ions incidents monocinétiques, la valeur moyenne de γ et la dispersion autour de cette moyenne, puis des grandeurs qui en découlent directement, lorsque α_i et β_i sont négligeables, comme la longueur parcourue et la durée du parcours d'un ion incident. Au chapitre VI nous incluerons d'une manière simple l'interaction des ions dans le terme γ et nous comparerons α_i avec γ.

L'étude de l'interaction ion incident - plasma fait intervenir comme paramètres d'un côté la charge et la vitesse de cet ion et de l'autre les températures et densités des différentes composantes du plasma.

Jusqu'à présent, l'étude de γ se faisait avec des conditions restrictives sur ces paramètres, soit sur la vitesse de l'ion incident, soit sur la dégénérescence du fluide d'électrons.

Le formalisme qui est présenté chapitre II permet de se placer dans un cadre beaucoup plus général qui est celui de l'Approximation de la Phase Aléatoire (A.P.A.) pour le plasma avec l'étude au chapitre III de la fonction diélectrique $\varepsilon(q,\omega)$ qui donne les propriétés du plasma nécessaires au calcul de γ.

Au chapitre IV nous calculons donc γ avec cette fonction diélectrique dans un domaine de valeurs de paramètres où aucun résultat n'était connu et nous donnons un développement à grande vitesse qui généralise le seul résultat antérieurement connu à température nulle.

Au chapitre V avec le même formalisme qu'au chapitre II, nous calculons la dispersion de γ autour de sa valeur moyenne.

Au chapitre VII nous indiquons brièvement comment on peut, à propos du calcul de γ, sortir du cadre de l'approximation du gaz d'électrons homogène.

L'interaction entre un ion incident et des électrons liés a déjà été longuement étudiée. Notre étude faite au chapitre VIII se rapporte au terme correctif donné par l'approximation de Born au deuxième ordre en donnant une forme plus compacte et plus maniable du résultat et en modélisant l'atome par un modèle Thoma-Fermi amélioré par rapport au modèle Lenz-Jensen habituellement utilisé pour ce genre de calcul.

Bien que l'étude soit faite dans un cadre assez général, nous l'avons appliquée, en particulier avec γ, pour étudier plus précisément l'interaction ion-plasma dans la fusion inertielle par faisceau d'ions.

C'est pourquoi nous présentons au chapitre I quelques données sur cette nouvelle approche de la fusion rapide.

* *
*

NOTATIONS

LE SYSTÈME D'UNITÉ TOUT AU LONG DE CE TRAVAIL EST LE M.K.S.A.

T_F : température de Fermi $T_F = \frac{1}{k_B} \times \frac{\hbar^2}{2m_e}(3\pi^2 n_e)^{2/3}$

q_F : nombre d'onde de Fermi $q_F = (3\pi^2 n_e)^{1/3}$

v_F : vitesse de Fermi $\frac{1}{2}mv_F^2 = k_B T_F$, $mv_F = \hbar q_F$

ε_F^o : énergie de Fermi $\varepsilon_F^o = k_B T_F$

ω_p : fréquence plasma $\omega_p^2 = \frac{n_e e^2}{\varepsilon_o m_e}$

λ_D : longueur d'écrantage de Debye $\lambda_D^2 = \frac{\varepsilon_o k_B T}{n_e e^2}$

λ_{TF} : longueur d'écrange de Thoma-Fermi $\lambda_{TF}^2 = \frac{v_F^2}{3\omega_p^2}$

T ou T^e : température électronique

T^i : température ionique

T_e : température réduite électronique $T_e = \frac{T}{T_F}$

μ : potentiel chimique

γ : potentiel chimique réduit $\gamma = \frac{\mu}{\varepsilon_F^o}$

α^e : dégénérescence $\alpha^e = \frac{\mu}{k_B T}$

$a_o(T_e)$: paramètre pour $\varepsilon(q,\omega)$ $a_o(T_e) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\gamma + (\gamma^2+\pi^2 T_e^2)^{1/2}\right)^{1/2}$

a_o : rayon de Bohr $a_o = (4\pi\varepsilon_o)\frac{\hbar^2}{me^2}$

αrs : constante de couplage pour un gaz dense $\alpha rs = \dfrac{1}{q_F a_o}$

$$\alpha = \left(\frac{3\pi}{4}\right)^{-1/3}$$

$\lambda\!\!\!^{-}$: longueur d'onde de Broglie $\lambda\!\!\!^{-} = \dfrac{\hbar}{\sqrt{2\pi m_e k_B T}}$

v,Z,M,E : vitesse, charge, masse et énergie de l'ion incident

$v_{TH}^{e,i}$: vitesse thermique électronique ou ionique

Pour $T << T_F$ $\quad v_{TH}^{e,i} = v_F^{e,i}$

Pour $T >> T_F$ $\quad v_{TH}^{e,i} = \sqrt{\dfrac{2kT^{e,i}}{m_{e,i}}}$

* *
*

CHAPITRE I

QUELQUES ORDRES DE GRANDEURS DANS LA FUSION INERTIELLE PAR FAISCEAUX D'IONS

Le principe est très semblable à la fusion inertielle par faisceaux laser. L'utilisation de faisceaux d'ions a été envisagée car ceux-ci présentent certains avantages par rapport aux faisceaux laser. En particulier le couplage faisceau cible est d'un meilleur rendement et ne fait pas intervenir d'effets non linéaires importants.

Un micro ballon (figure 1.1) de quelques millimètres de rayon est composé du combustible (mélange deutérium + tritium) enrobé d'une première couche, appelée pousseur, qui servira à le comprimer et d'une seconde couche (couche d'ablation) qui en explosant, après avoir reçu l'énergie des faisceaux d'ions, donnera de la quantité de mouvement au pousseur.

La figure (1.2) montre les principales phases d'évolution du micro ballon :

- dépôt d'énergie par faisceaux d'ions,
- ablation qui induit une violente onde de compression dans le pousseur,
- fin de compression et début de combustion.

Il faut, bien sûr, ajuster de nombreux paramètres pour optimiser le processus. Nous avons reporté dans le tableau (1) quelques valeurs caractéristiques pour cette fusion.

En ce qui nous concerne, deux remarques importantes peuvent être faites sur les ordres de grandeur :

Premièrement, la distance interparticulaire dans le faisceau qui est de l'ordre de 100 Å ou plus est toujours très supérieure à

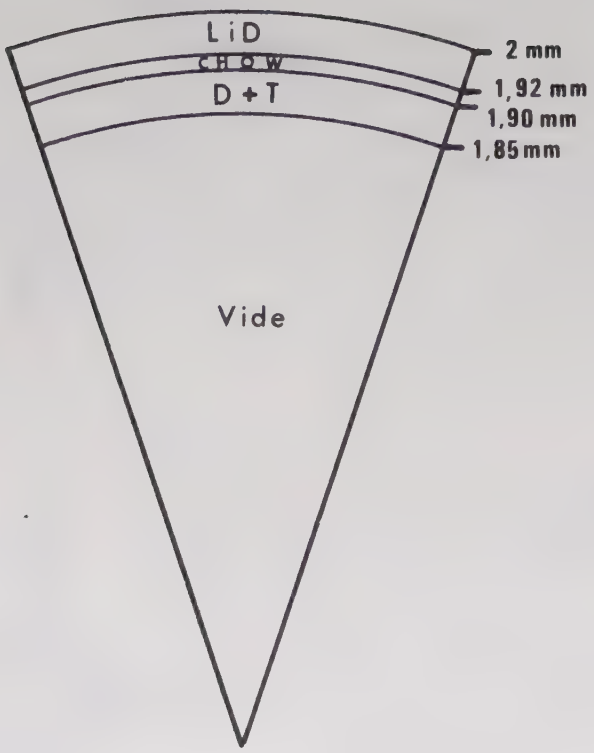


FIGURE 1.1

Coupe d'une portion de micro ballon utilisé
avec un faisceau de protons de 0,77 MeV

LiD : Couche d'ablation, densité 0,88 g cm^{-3}

CHOW : Pousseur qui stoppe la tête du faisceau et comprime ensuite le mélange D + T

D + T : Ce combustible (constitué de Deutérium et de Tritium) libère de l'énergie sous forme de neutrons rapides et de particules α de 3,5 MeV

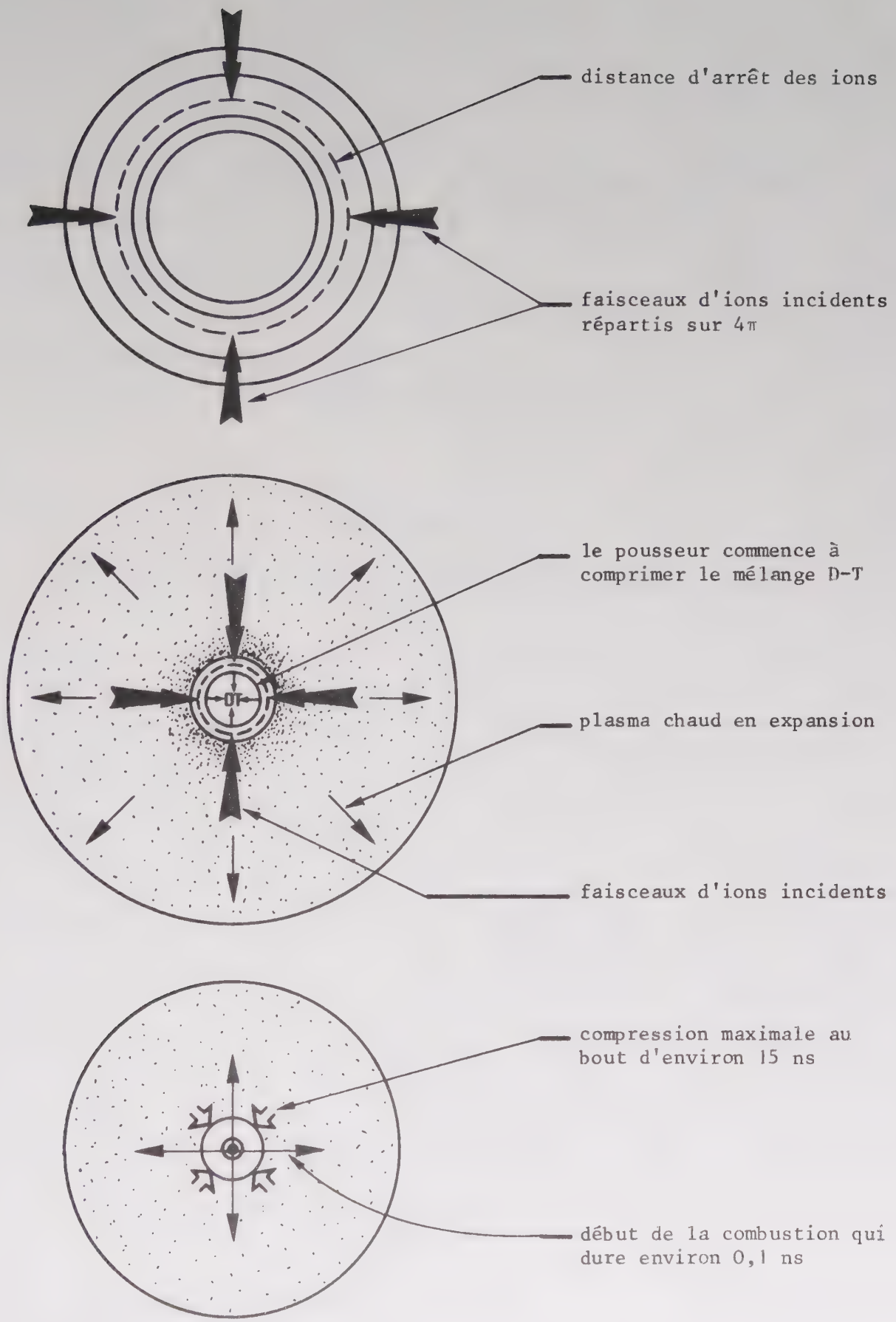


FIGURE 1.2

Evolution du microballon pour un faisceau de protons

Energie des ions incidents : 1 à 10 MeV/masse protonique

$\frac{v}{c}$ des ions incidents : $4,6 \times 10^{-2}$ à $1,5 \times 10^{-1}$

Puissance maximale du faisceau incident : 250 TW/cm^2

Distance interparticulaire pour un faisceau de protons : 60 à 90 Å

TABLEAU 1

Quelques caractéristiques du faisceau incident.

n_e \ T_e	10^4 K	10^5 K	10^6 K	10^7 K	10^8 K
10^{21} cm^{-3}	2,2	6,9	22	69	.
10^{22} cm^{-3}	0,8	2,2	6,9	22	69
10^{23} cm^{-3}	0,5	0,7	2,2	6,9	22
10^{24} cm^{-3}	0,35	0,35	0,7	2,2	6,9
10^{25} cm^{-3}	0,24	0,24	0,25	0,7	2,2
10^{26} cm^{-3}	0,16	0,16	0,16	0,2	0,7

TABLEAU 2

Distance d'écrantage en Å dans un fluide d'électrons en fonction de la densité et de la température.

la distance d'écrantage des électrons du plasma cible (nous avons reporté, pour les domaines de densité et de température se rapportant à la fusion inertielle, cette distance d'écrantage dans le tableau (2)).

Ceci nous autorise, en première approximation, à négliger l'aspect collectif du faisceau incident et à nous restreindre à l'étude de l'interaction ion - plasma cible.

Deuxièmement, le rapport vitesse de l'ion incident sur vitesse de la lumière étant bien inférieur à 1, ceci nous permet d'utiliser la théorie non relativiste d'interaction ion - plasma.

Sur la figure (1.3) nous avons représenté les différents domaines de densité et de température des électrons pouvant être rencontrés dans le micro ballon.

* *
*

CHAPITRE II

EXPRESSION DU POUVOIR D'ARRET DANS UN PLASMA

II.1. INTRODUCTION

Considérons un plasma composé d'électrons libres et d'ions et macroscopiquement neutre, dans lequel est introduit un ion de charge Z_e, de masse M et de vitesse v. Cet ion crée, dans le plasma, un champ électrique E_{ext} qui induit des déplacements de charge et donc un nouveau champ E_{ind}. C'est ce champ E_{ind} qui va agir sur la charge Z_e et va freiner l'ion incident.

On sait calculer un tel freinage lorsque le champ de l'ion est traité comme une perturbation. Cela se fait dans le cadre de l'approximation linéaire en mécanique classique et l'approximation de Born en mécanique quantique.

Cette approximation est d'autant meilleure que Z est petit puisque E_{ext} est proportionnel à Z, et que l'énergie des électrons ou des ions du plasma est grande.

Nous supposerons que E (énergie de l'ion incident) est toujours bien supérieure à $k_B T^e$ ou $k_B T^i$, ce qui est le cas dans la fusion inertielle. Ceci nous permet de prendre la trajectoire de l'ion incident comme pratiquement rectiligne et de négliger l'énergie de recul lors d'un choc.

Du fait de la longue portée de l'interaction coulombienne, l'aspect collectif du plasma doit être mis en avant. *Macroscopiquement*, le plasma devient simplement un milieu diélectrique, toutes ses caractéristiques entrant seulement dans la fonction diélectrique $\varepsilon(q,\omega)$.

Le gros avantage du formalisme qui va être développé est qu'il traite également, dans l'approximation de Born, exactement les chocs proches.

Bien que $\varepsilon(q,\omega)$ soit calculée dans le cadre de la mécanique quantique, l'expression du pouvoir d'arrêt en fonction de $\varepsilon(q,\omega)$ est la même dans la théorie classique ou quantique.

Nous allons montrer ci-dessous comment obtenir cette expression à partir des équations de Maxwell.

II.2. EXPRESSION DU POUVOIR D'ARRÊT A L'AIDE DES EQUATIONS DE MAXWELL

Les équations de Maxwell pour un milieu quelconque s'écrivent :

$$(M1)\quad \vec{\nabla}.\vec{E}(\vec{r},t) = \frac{\rho(\vec{r},t)}{\varepsilon_o} \qquad (M2)\quad \vec{\nabla}.\vec{B}(\vec{r},t) = 0$$

$$(M3)\quad \vec{\nabla}_\Lambda\vec{E}(\vec{r},t) = -\frac{\partial\vec{B}(r,t)}{\partial t} \qquad (M4)\quad \vec{\nabla}_\Lambda\vec{B}(\vec{r},t) = \mu_o\left(\vec{j}(\vec{r},t) + \varepsilon_o\frac{\partial E}{\partial t}(\vec{r},t)\right)$$

La divergence de (M4) combinée avec (M1) donnant

$$\vec{\nabla}.\vec{j}(\vec{r},t) = -\frac{\partial\rho}{\partial t}(\vec{r},t)$$

Dans ces équations $\vec{E}$, $\vec{B}$, ρ et $\vec{j}$ sont les champs, densité et courants globaux.

Pour simplifier nous allons décomposer le champ électrique en deux composantes : un champ longitudinal $\vec{E}_\ell^\ell$ tel que $\vec{\nabla}_\Lambda\vec{E}_\ell = 0$ et un champ transverse $\vec{E}_{tr}$ tel que $\vec{\nabla}.\vec{E}_{tr} = 0$, ceci nous donne :

$$\vec{\nabla}.\vec{E}_\ell(\vec{r},t) = \frac{\rho(r,t)}{\varepsilon_o}$$

$$\vec{\nabla}^2.\vec{E}_{tr}(\vec{r},t) = \mu_o\left[\frac{\partial\vec{j}_{tr}}{\partial t}(\vec{r},t) + \varepsilon_o\frac{\partial^2\vec{E}_{tr}(\vec{r},t)}{\partial t^2}\right]$$

$$\vec{j}_\ell(\vec{r},t) + \varepsilon_o \frac{\partial \vec{E}_\ell}{\partial t}(\vec{r},t) = \vec{0}$$

$\vec{j}_\ell$ et $\vec{j}_{tr}$ vérifiant de même $\vec{\nabla}.\vec{j}_{tr}(\vec{r},t) = 0$ et $\vec{\nabla}\wedge\vec{j}_\ell(\vec{r},t) = \vec{0}$

Appliquons ces équations pour aborder la réponse d'un plasma à une perturbation extérieure, en l'occurrence l'ion de charge Z_e et de vitesse v. En traitant le champ de l'ion comme une perturbation, nous faisons l'approximation linéaire, c'est-à-dire, que le courant, la densité de charge et les champs induits sont fonctions linéaires du champ extérieur. Nous allons supposer le plasma homogène et infini, pour poursuivre les calculs il est alors plus simple de passer par des transformées de Fourier.

Pour une fonction quelconque $F(\vec{r},t)$ nous définissons sa transformée de Fourier $F(\vec{q},\omega)$ par :

$$F(\vec{r},t) = \sum_{\vec{q},\omega} F(\vec{q},\omega)\exp(i\vec{q}.\vec{r} - i\omega t)$$

Les équations de Maxwell étant linéaires, on obtient :

$$(M'1) : \quad i\vec{q}.\vec{E}_\ell(\vec{q},\omega) = \frac{\rho(\vec{q},\omega)}{\varepsilon_o}$$

$$(M'2) : \quad q^2\vec{E}_{tr}(\vec{q},\omega) = \mu_o\left[i\omega\vec{j}_{tr}(\vec{q},\omega) + \varepsilon_o\omega^2\vec{E}_{tr}(\vec{q},\omega)\right]$$

$$(M'3) : \quad i\omega\vec{j}_\ell(\vec{q},\omega) + \varepsilon_o\omega^2\vec{E}_\ell(\vec{q},\omega) = \vec{0}$$

L'approximation linéaire liant les effets extérieurs aux effets induits se traduisent habituellement par :

$$(M'4) : \quad \vec{j}_{ind}(\vec{q},\omega) = -i\omega\varepsilon_o\left(\vec{\vec{\varepsilon}}(\vec{q},\omega) - \vec{\vec{1}}\right)\vec{E}(\vec{q},\omega)$$

$\vec{\vec{\varepsilon}}(\vec{q},\omega)$, appelé tenseur diélectrique, est une matrice (3,3) diagonale si, comme nous le supposerons par la suite, le milieu est isotrope (il n'y a pas de champ magnétique statique) et dans ce cas $\vec{\vec{\varepsilon}}(\vec{q},\omega)$ n'est fonction que du module de $\vec{q}$.

$\vec{\vec{1}}$ est la matrice (3,3) unité.

(M'4) peut se décomposer en deux relations liant les grandeurs longitudinale et transverse. $\overleftrightarrow{\varepsilon}(q,\omega)$ fait alors place à 2 scalaires $\varepsilon_\ell(q,\omega)$ et $\varepsilon_{tr}(q,\omega)$ (par raison de symétrie toute direction perpendiculaire à $\vec{q}$ est équivalente).

D'après le théorème de superposition, les grandeurs longitudinale, transverse, totale, extérieure et induite vérifient indépendamment les équations de Maxwell.

Ainsi, pour le champ longitudinal nous avons la relation :

$$\vec{j}_\ell(\vec{q},\omega) = i\omega\varepsilon_o \vec{E}_\ell(\vec{q},\omega)$$

et de même pour $(\vec{j}_\ell^{ind}, \vec{E}_\ell^{ind})$ et $(\vec{j}_\ell^{ext}, \vec{E}_\ell^{ext})$.

Ceci combiné avec (M'4) donne :

$$\vec{j}_\ell^{ext}(\vec{q},\omega) = \vec{j}_\ell(\vec{q},\omega) \times \varepsilon_\ell(q,\omega)$$

de même : $$E_\ell^{ext}(\vec{q},\omega) = \varepsilon_\ell(q,\omega)\, \vec{E}_\ell(q,\omega)$$

$$\rho^{ext}(\vec{q},\omega) = \varepsilon_\ell(q,\omega) \times \rho(\vec{q},\omega)$$

et $$\vec{E}_\ell^{ind}(\vec{q},\omega) = \vec{E}_\ell(\vec{q},\omega) \times [1 - \varepsilon_\ell(q,\omega)]$$

(M'1) nous donne donc :

$$\vec{E}_\ell^{ind}(\vec{q},\omega) = -\frac{i\vec{q}}{q^2} \frac{\rho_{ext}(\vec{q},\omega)}{\varepsilon_\ell(q,\omega)} [1 - \varepsilon_\ell(q,\omega)]$$

Le même genre de calcul peut être fait pour $\vec{E}_{tr}^{ind}(\vec{q},\omega)$, ce qui donne :

$$\vec{E}_{ind}^{tr}(\vec{q},\omega) = i\mu_o\omega \vec{j}_{ext}^{tr} \frac{\frac{\omega^2}{c^2} \times \left(\varepsilon_{tr}(q,\omega) - 1\right)}{\left(q^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right) \times \left(q^2 - \varepsilon_{tr}(q,\omega) \times \frac{\omega^2}{c^2}\right)}$$

Appliquons ces résultats à une charge Z_e de vitesse $\vec{v}$:

$$\rho_{ext}(\vec{r},t) = Ze\delta(\vec{r} - \vec{v}t) = Ze \sum_{\vec{q}} \exp(i\vec{q}.\vec{r} - i\vec{q}.\vec{v}t)$$

$$\vec{j}^{ext}(\vec{r},t) = \vec{v} \times Ze\delta(\vec{r} - \vec{v}t) = Ze \sum_{q} \vec{v} \exp(i\vec{q} \cdot \vec{r} - i\vec{q}.\vec{v}t)$$

Soit :

$$\rho_{ext}(\vec{q},\omega) = Ze\ \delta(\omega - \vec{q}.\vec{v})$$

$$\vec{j}^{ext}(\vec{q},\omega) = Ze\vec{v}\delta(\omega - \vec{q}.\vec{v})$$

$$\vec{j}^{ext}_{\ell}(\vec{q},\omega) = \frac{Ze}{q^2}.\vec{q}.\vec{v}.\vec{q} \times \delta(\omega - \vec{q}.\vec{v})$$

$$\vec{j}^{ext}_{tr}(\vec{q},\omega) = \frac{Ze}{q^2}\ \vec{q}_{\Lambda}(\vec{v}_{\Lambda}\vec{q})\delta(\omega - \vec{q}.\vec{v}).$$

La force agissant sur la particule chargée est due au produit de Ze par le champ électrique induit au point $\vec{r} = \vec{v}t$, avec :

$$\vec{E}^{ind}(\vec{v}t,t) = \sum_{\vec{q},\omega} \vec{E}^{ind}(\vec{q},\omega)\exp(i\vec{q}.\vec{v}t - i\omega t)\delta(\omega - \vec{q}.\vec{v})$$

Soit :

$$\vec{E}^{ind}(\vec{v}t,t) = \sum_{\vec{q}} \vec{E}^{ind}(\vec{q},\vec{q}.\vec{v})$$

Le pouvoir d'arrêt qui est la dérivée de l'énergie de l'ion incident par rapport au parcours s'écrit :

$$\frac{dE}{dx} = - \text{ projection de la force sur le parcours}$$

$$= - Ze \sum_{\vec{q}} \frac{\vec{v}.\vec{E}^{ind}(\vec{q},\vec{q}.\vec{v})}{v}$$

Ceci nous donne pour la composante longitudinale :

$$\frac{dE_{\ell}}{dx} = - \frac{Z^2e^2}{4\pi^2v^2\varepsilon_o}\ i\left\{\int_0^{\infty} \frac{dq}{q} \int_{-q.v}^{q.v} d\omega\ \frac{\omega}{\varepsilon_{\ell}(q,\omega)}[1 - \varepsilon_{\ell}(q,\omega)]\right\}$$

et pour la composante transverse :

$$\frac{dE_{tr}}{dx} = -\frac{Z^2e^2}{4\pi^2c^2\varepsilon_o}\, i\left\{\int_o^{\infty} qdq \int_{-q.v}^{+q.v} \frac{\omega d\omega\left(1-\frac{\omega^2}{q^2v^2}\right)\left(\frac{\omega^2}{c^2}[\varepsilon_{tr}(q,\omega) - 1]\right)}{\left(q^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right)\left(q^2 - \varepsilon_{tr}(q,\omega)\,\frac{\omega^2}{c^2}\right)}\right\}$$

$\vec{E}(\vec{r},t)$ et $\vec{j}(\vec{r},t)$ étant réels on en déduit $\varepsilon(\vec{q},\omega) = \varepsilon^*(-\vec{q},-\omega)$, l'astérisque désignant le complexe conjugué. Nous avons vu que, le plasma étant isotrope, nous avions $\varepsilon(\vec{q},\omega)$ fonction uniquement du module de $\vec{q}$, il s'en suit : $\varepsilon(q,\omega) = \varepsilon(-q,\omega)$ et $\varepsilon(q,\omega) = \varepsilon^*(q,-\omega)$

Lorsque $q \to \pm \infty$ nous verrons que $\varepsilon(q,\omega) \to 1$. La partie réelle de l'intégrale longitudinale diverge donc à $\pm \infty$ mais la parité de $\varepsilon(q,\omega)$ nous permet d'annuler la partie réelle de l'intégrale et il reste :

$$\frac{dE_{\ell}}{dx} = \frac{Z^2e^2}{4\pi^2v^2\varepsilon_o} \times \int_o^{\infty} \frac{dq}{q} \int_{-q.v}^{+q.v} \omega d\omega\left(\mathrm{Im}\ \frac{1}{\varepsilon_{\ell}(q,\omega)}\right)$$

$$\frac{dE_{tr}}{dx} = \frac{Z^2e^2}{4\pi^2c^2\varepsilon_o} \int_o^{\infty} qdq \int_{-q.v}^{+q.v} \omega d\omega\left(1 - \frac{\omega^2}{q^2v^2}\right) \times \mathrm{Im}\left(\frac{1}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\,\varepsilon_{tr}(q,\omega)}\right)$$

$\frac{dE_{tr}}{dx}$ qui est un freinage par rayonnement transverse (effet Cerenkov) est dans le rapport $\frac{v^2}{c^2}$ avec $\frac{dE_{\ell}}{dx}$, freinage "électostatique".

Faisant ici une théorie non relativiste nous négligerons, dans la suite, le freinage par rayonnement transverse pour ne conserver que le freinage par rayonnement longitudinal.

Remarque

Plus traditionnellement les équations de Maxwell dans un milieu diélectrique sont écrites en utilisant les grandeurs $\vec{H}(\vec{q},\omega)$ et $\vec{D}(\vec{q},\omega)$ définies par :

$$\vec{H}(\vec{q},\omega) = \frac{1}{\mu(\vec{q},\omega)} \vec{B}(q,\omega)$$

et $$\vec{D}(\vec{q},\omega) = \varepsilon(\vec{q},\omega)\vec{E}(\vec{q},\omega)$$

On peut montrer facilement que ces notations sont reliées aux nôtres par :

$$\varepsilon(q,\omega) = \varepsilon_\ell(q,\omega)$$

et $$q^2\left[1 - \frac{1}{\mu(q,\omega)}\right] = \frac{\omega^2}{c^2}\left(\varepsilon_{tr}(q,\omega) - \varepsilon_\ell(q,\omega)\right)$$

Pour un plasma non relativiste, $\varepsilon_\ell(q,\omega)$ et $\varepsilon_{tr}(q,\omega)$ sont du même ordre de grandeur ($\mu(q,\omega) \simeq 1$).

Le pouvoir d'arrêt, dans notre modèle ainsi défini, s'écrit donc :

$$\frac{dE}{dx} = S = \frac{1}{2\pi^2\varepsilon_o}\left(\frac{Ze}{v}\right)^2 \times \int_o^\infty \frac{dq}{q} \int_o^{q.v} \omega d\omega \ \mathrm{Im}\left(\frac{1}{\varepsilon(q,\omega)}\right) \qquad (2.1)$$

Le calcul peut également se faire dans le cadre de la mécanique quantique avec l'approximation de Born au premier ordre [1], on obtient alors :

$$\frac{dE}{dx} = \frac{Z^2e^2}{4\pi^3 v\varepsilon_o} \int d^3q \ \frac{\frac{\omega}{q^2}}{e^{\beta\hbar\omega} - 1} \ \mathrm{Im}\left(\frac{1}{\varepsilon(q,\omega)}\right)$$

avec $$\hbar\omega = \hbar\vec{q}.\vec{v} + \frac{\hbar^2q^2}{2M}$$

Le terme $\frac{\hbar^2q^2}{2M}$ représente l'énergie de recul. En négligeant cette énergie de recul (supposée petite à la fois pour appliquer l'approximation de Born et pour faire une théorie linéaire dans le cas classique), le calcul quantique et le calcul classique donnent donc *le même résultat*.

Il nous reste maintenant, pour déterminer le pouvoir d'arrêt, à obtenir la constante diélectrique.

* *
*

CHAPITRE III

FONCTION DIELECTRIQUE A.P.A. POUR UN FLUIDE D'ELECTRONS HOMOGENE

III.1. INTRODUCTION

Nous allons maintenant appliquer le formalisme du chapitre précédent à l'étude du freinage par les électrons libres du plasma (c'est-à-dire le terme γ de l'introduction générale). Comme nous l'avons déjà dit plus haut nous supposons que ces électrons sont sans interaction avec les ions et les électrons liés du plasma, ceux-ci n'étant présents que pour assurer la neutralité électrique.

Nous supposons, de plus, ce fluide d'électrons homogène. Comme nous le verrons au chapitre VII, jusqu'à présent toutes les études faites sur γ utilisent les résultats avec un fluide homogène même quand on veut tenir compte de l'inhomogénéité du plasma.

III.2. DOMAINES DE VALIDITE DE L'A.P.A.

Sur la figure (3.1) nous avons représenté différentes régions en densité et température d'un fluide d'électrons assez dense.

On peut distinguer :

- Régions ①, ②, ⑤ : température électronique > température de Fermi. La distribution des vitesses électroniques est voisine d'une distribution de Boltzmann.
- Régions ③, ④ : température électronique < température de Fermi : distribution de Fermi Dirac pour les électrons.

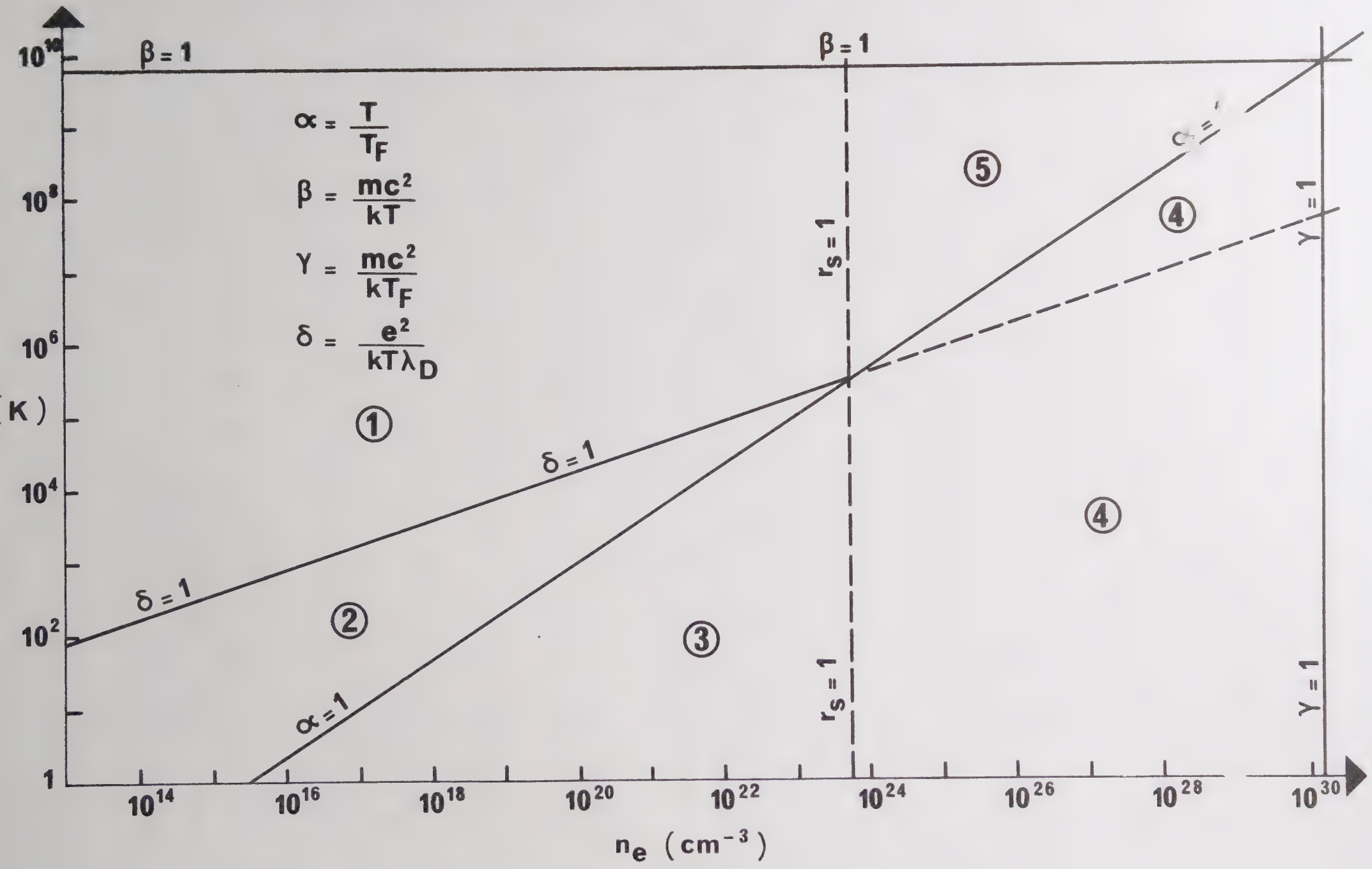

10^{10}
10^{8}
10^{6}
10^{4}
10^{2}
1
(K)
$\beta = 1$
$\beta = 1$
$\alpha = \frac{T}{T_F}$
$\beta = \frac{mc^2}{kT}$
$\gamma = \frac{mc^2}{kT_F}$
$\delta = \frac{e^2}{kT\lambda_D}$
①
②
③
④
④
⑤
$\delta = 1$
$\delta = 1$
$\alpha = 1$
$r_s = 1$
$r_s = 1$
$\gamma = 1$
$\gamma = 1$
10^{14}
10^{16}
10^{18}
10^{20}
10^{22}
10^{24}
10^{26}
10^{28}
10^{30}
n_e (cm^{-3})

FIGURE 3.1

- Régions ①, ⑤ : $\Lambda = \frac{e^2}{kT\lambda_D}$, $\Lambda < 1$ l'énergie potentielle moyenne des électrons, représentée par $\frac{e^2}{\lambda_D}$, est petite par rapport à leur énergie cinétique moyenne $k_B T$, les électrons sont peu couplés entre eux.

- Région ④ : même chose que région ① et ⑤ mais dans le cas dégénéré, les électrons sont peu couplés.

- Région ② : $\Lambda > 1$ l'énergie potentielle domine l'énergie cinétique, les électrons sont alors assez fortement couplés.

- Région ③ : même chose que ② mais dans le cas dégénéré.

Il est bien entendu que la séparation entre régions n'est pas discontinue et que l'on passe progressivement d'une caractéristique à une autre en franchissant les frontières.

La constante diélectrique d'un fluide d'électrons homogène n'est bien connue que dans le cas où l'énergie cinétique moyenne est très supérieure à l'énergie potentielle moyenne, c'est-à-dire dans les régions ①, ⑤ et ④ assez loin des frontières de ② et ③.

Nous avons alors :

$$\text{pour } T \gg T_F \qquad \frac{e^2}{k_B T \lambda_D} \ll 1$$

$$\text{pour } T \text{ quelconque} \qquad \alpha rs = \frac{1}{q_F a_o} \ll 1$$

Se reportant à la figure (1.3) nous voyons que ces deux possibilités recouvrent une grande partie du domaine (n_e, T) ayant trait à la fusion inertielle.

Ces conditions étant remplies, $\varepsilon(q,\omega)$ peut se calculer dans le formalisme de l'Approximation de Phase Aléatoire (A.P.A.) [1].

Dans cette approximation, chaque électron ressent en plus d'un champ extérieur, le champ moyen des autres électrons.

Pour trouver $\varepsilon(q,\omega)$ dans l'A.P.A. il suffit de résoudre l'équation de Vlasov linéarisée en mécanique quantique [2].

L'expression de $\varepsilon(q,\omega)_{A.P.A.}$ a été donnée dans le cas où $T = 0$ par Lindhard [3] et pour $T >> T_F$ elle est reliée à la fonction tabulée par Fried et Conte [4].

L'étude à température quelconque a été faite dans notre laboratoire dans le cadre d'une thèse de troisième cycle par C.Gouédard [5] et [6]. Nous allons rappeler ici ses principaux résultats.

III.3. RESULTATS DE C.GOUÉDARD

III.3.a. DEGENERESCENCE QUELCONQUE

Posons :

$$\varepsilon(q,\omega) = 1 - V(q)X^o(q,\omega)$$

$V(q) = \dfrac{e^2}{\varepsilon_o q^2}$,

$X^o(q,\omega)$: réponse linéaire d'un gaz d'électrons libres

$$X^o(q,\omega) = -2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{[n^o(k+q) - n^o(k)]}{[\hbar\omega + i\eta - (\varepsilon^o_{k+q} - \varepsilon^o_k)]} \qquad (3.1)$$

η étant un infiniment petit positif

ε^o_k = énergie d'un électron d'impulsion $\hbar k$: $\varepsilon^o_k = \dfrac{\hbar^2 k^2}{2m_e}$

$n^o(k) = \left\{ e^{\beta[\varepsilon^o_k - \mu]} + 1 \right\}^{-1}$

avec $\beta = \dfrac{1}{k_B T}$, μ = potentiel chimique.

$n^o(k)$ est la distribution de Fermi-Dirac.

En prenant comme variables réduites z et u définies par :

$$z = \frac{q}{2q_F} \quad \text{et} \quad u = \frac{\omega}{qv_F} ,$$

nous obtenons :

$$X^o(z,u) = - \frac{4\alpha rs}{\pi} \frac{q_F^2 \varepsilon_o}{e^2} G(z,u)$$

avec :

$$G(z,u) = f_1(z,u) + i f_2(z,u)$$

$$f_2(z,u) = - \frac{\pi T_e}{8z} \operatorname{Log} \frac{1 + e^{\frac{\gamma_-^e p_+^2}{T_e}}}{1 + e^{\frac{\gamma_-^e p_-^2}{T_e}}} \qquad (3.2)$$

$$f_1(z,u) = \int_o^\infty dk n^o(k) + \pi T_e \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{b_n}{r_n^2} - \frac{q_F}{2q} \left[\operatorname{Arctg} \frac{P_+ + a_n}{b_n} + \operatorname{Arctg} \frac{P_+ - a_n}{b_n} \right.\right.$$

$$\left.\left. - \operatorname{Arctg} \frac{P_- + a_n}{b_n} - \operatorname{Arctg} \frac{P_- - a_n}{b_n} \right] \right\} \qquad (3.3)$$

Les paramètres sans dimension étant :

$$T_e = \frac{T}{T_F} , \qquad \gamma^e = \frac{\mu}{\varepsilon_F^o} , \qquad P_\pm = u \pm z$$

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\gamma^e + \left(\gamma^{e2} + (2n+1)^2 \pi^2 T_e^2 \right)^{1/2} \right]^{1/2}$$

$$b_n = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[- \gamma^e + \left(\gamma^{e2} + (2n+1)^2 \pi^2 T_e^2 \right)^{1/2} \right]^{1/2}$$

$$n^o(k) = \frac{1}{\left(e^{\frac{k^2 - \gamma^e}{T_e}} + 1 \right)} , \qquad r_n^2 = a_n^2 + b_n^2$$

De plus f_1 et f_2 sont liées par la relation de Kramers-Krönig :

$$f_1(z,u) = -\frac{1}{\pi} \text{ P.P.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_2(z,u')}{(u-u')} \, du' \qquad (3.4)$$

P.P. désignant la partie principale de Cauchy.

(3.4) peut se transformer en posant :

$$f_1(z,u) = -\frac{\pi T_e}{8z} \left[F(p_+) - F(p_-) \right] \qquad (3.5)$$

ce qui donne :

$$F(p) = -\frac{1}{\pi} \text{ P.P.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{h(p')\,dp'}{p - p'}$$

$$h(z) = \text{Log}\left(1 + e^{\frac{\gamma - z^2}{T_e}}\right)$$

La fonction F(x) a les développements suivants :

a) Lorsque $x \to 0$

$$\frac{\pi T_e}{2} F(x) \longrightarrow 2x\left[\int_0^{\infty} n^o(k) - \frac{x^2}{3} S(T_e) + O(x^4)\right] \qquad (3.6)$$

$$S(T_e) = \pi T_e \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{r_n^4} \left(\frac{4a_n^2}{r_n^2} - 1\right)$$

b) Lorsque $x \to \infty$

$$\frac{\pi T_e}{2} F(x) \longrightarrow \frac{2}{3}\left[\frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \times \frac{1}{x^{2n+1}} T_e^n \frac{F_{n+1/2}(\alpha^e)}{F_{1/2}(\alpha^e)}\right] \qquad (3.7)$$

$\alpha^e = \frac{\mu}{k_B T}$ = dégénérescence du fluide.

$F_\nu(\alpha^e)$ étant la fonction de Fermi :

$$F_\nu(\alpha^e) = \int_0^\infty \frac{x^\nu}{\left(e^{x-\alpha^e} + 1\right)} dx$$

Notons en particuler la relation :

$$\left(\frac{2}{3}\right) T_e^{-3/2} = F_{1/2}(\alpha^e) \qquad (3.8)$$

qui détermine le potentiel chimique en fonction de la température et de la densité des électrons.

L'expression générale de $X^o(q,\omega)$ permet en premier lieu de retrouver les limites haute et basse température.

III.3.b. LIMITE BASSE TEMPERATURE

Le calcul, pour obtenir $f_1(z,u)$ dans cette limite, se fait en remarquant que :

$$f_1(z,u) = \sum_{n=0}^{\infty} f\Big((2n+1)\lambda\Big)$$

avec $\lambda \to 0$ quand $T_e \to 0$.

Ainsi, quand $T_e \to 0$, la fonction f convergeant très lentement, la somme fait intervenir surtout les grandes valeurs de n et on peut alors remplacer cette somme par une intégrale.

Nous obtenons dans ce cas, avec les notations de (3.5) :

$$F(x) = 2x\left[\frac{a_o(T_e)}{2} + \frac{\gamma - x^2}{8x} \operatorname{Log} \frac{b_o^2(T_e) + \{x+a_o(T_e)\}^2}{b_o^2(T_e) + \{x-a_o(T_e)\}^2}\right] + O(T_e) \qquad (3.9)$$

$b_o(T_e)$ et $a_o(T_e)$ étant les valeurs de b_n et a_n pour n = 0, $a_o(T_e)$ jouant un rôle important dans la suite,

rappelons que :

$$a_o(T_e) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\gamma^e + (\gamma e^2 + \pi^2 T_e^2)^{1/2} \right]^{1/2} \qquad (3.10)$$

En particulier pour $T_e = 0$, (3.9) devient :

$$F(x) = 2x\left[\frac{1}{2} + \frac{1 - x^2}{4x} \text{ Log } \frac{x + 1}{x - 1}\right]$$

qui est l'expression donnée par Lindhard [10].

Le résultat (3.9) de C.Gouédard améliore donc celui de Lindhard, il donne satisfaction jusqu'à environ $T_e = 0,8$.

La partie imaginaire devient à température nulle :

$$f_2(z,u) = \begin{cases} 0 \text{ pour } |z-u| \geq 1 \\ \frac{\pi}{8z}\left(1 - (z-u)^2\right) \text{ pour } |z-u| \leq 1 \text{ et } |z+u| \geq 1 \\ \frac{\pi}{8z}\left((z+u)^2 - (z-u)^2\right) \text{ pour } |z+u| \leq 1 \end{cases}$$

III.3.c. LIMITE HAUTE TEMPERATURE

Nous sommes dans le cas où $T_e >> 1$ et $\alpha^e << -1$. (3.8) peut se simplifier, donnant :

$$\gamma^e = \alpha^e T_e = T_e \times \text{Log } \frac{4}{3 \times T_e^{3/2} \times \sqrt{\pi}}$$

α^e étant $<< -1$, on peut dans la relation de Kramers-Krönig, remplacer

$$h(z) = \text{Log}\left(1 + e^{\left(\alpha^e - \frac{z^2}{T_e}\right)}\right) \text{ par } \frac{4}{3\sqrt{\pi} T_e^{3/2}} e^{-\frac{z^2}{T_e}}$$

Ceci nous conduit à :

$$F(p) = -\frac{1}{\pi} PP \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{h(p')dp'}{p - p'} = \frac{4}{3\pi T_e^{3/2}} \times Z(p/\sqrt{T_e}) \qquad (3.11)$$

Z(x) étant la fonction tabulée par Fried et Conte [4]

$$Z(x) = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \times \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt\ \exp(-t^2)}{x - t}$$

Bien que Z(x) soit une fonction plus facilement calculable que l'expression générale de F(x), il nous faut tout de même faire une intégration numérique qui oblige à passer par un tableau de données, d'un emploi assez lourd, pour être utilisé par la suite dans l'expression du pouvoir d'arrêt. Pour éviter cet inconvénient, il est commode d'utiliser une bonne approximation analytique de cette fonction. La fonction Z(x) se prête bien à ce genre de pratique car on connait son développement en série à la fois pour x tendant vers zéro et vers l'infini :

$$Z(x) = -2xY(x) \qquad Y(x) = \frac{\exp(-x^2)}{x} \int_0^x \exp(t^2)dt$$

* $x \to 0$

$$Y(x) = 1 - \frac{2x^2}{3} + \frac{4x^4}{15} - \frac{8x^6}{105} + \ldots = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n \pi^{1/2}/(n + \tfrac{1}{2})!$$

* $x \to \infty$

$$Y(x) = \frac{1}{2x^2} \times \left[1 + \frac{1}{2x^2} + \frac{3}{4x^4} + \ldots\right] = \frac{1}{2x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{-(2n+1)}}{\sqrt{\pi}} \times (n - \tfrac{1}{2})!$$

Les approximants de Padé sont de bons candidats pour ce genre de calcul. Un tel approximant d'ordre k s'écrit :

$$R_k(x) = \frac{P_k(x)}{Q_k(x)} \quad \text{avec :}$$

$$P_k(x) = p_o + p_1 x + \ldots p_{k-1} x^{k-1}$$

$$Q_k(x) = 1 + q_o x + \ldots q_{k-1} x^k$$

$Y(x)$ étant paire, nous posons $Y(x) = f(t)$ avec $t = x^2$.

La méthode la plus immédiate pour obtenir $R_k(t)$ consiste à poser :

* $t \to 0$ $\qquad f(t) - R_k(t) = O(t^k)$

* $t \to \infty$ $\qquad f(t) - R_k(t) = O(t^{-k-1})$

C'est-à-dire que nous égalons autant de termes dans le développement à petit t que dans celui à grand t.

Une formule qui permet de retrouver rapidement ces approximants est celle de Wynn [7] et [8] :

$$f(t) = \cfrac{1}{1 + 2t - \cfrac{4t}{3 + 2t - \cfrac{8t}{5 + 2t - \cfrac{12t}{7 + 2t \ldots}}}}$$

qui converge exactement comme $R_k(t)$.

On peut optimiser le choix des approximants de Padé en posant :

* $t \to 0$ $\qquad f(t) - R_k^{(m)} = O(t^{k+m})$

* $t \to \infty$ $\qquad f(t) - R_k^{(m)}(t) = O(t^{-k-1+m})$

C'est-à-dire que l'on prend en compte, pour obtenir les $2k$ coefficients de R_k, $2m$ coefficients de plus dans le développement à petit t que dans celui à grand t, m étant un paramètre a priori positif ou négatif qui donne la meilleure précision à k donné. Les auteurs de la référence [8] ont montré que la bonne valeur pour m, à grand k, est $m = \frac{k}{3}$.

Le tableau (3) donne les approximants R_k et $R_k^{(m)}$ avec $m = \frac{k}{3}$ pour $k = 1, 3, 6$ avec l'erreur maximale relative commise.

$$R_1(x) = \frac{2x}{1+2x^2}\ , \qquad R_3^{(1)}(x) = \frac{2x(105+20x^2+4x^4)}{(105+90x^2+36x^4+8x^6)}$$

$$R_3(x) = \frac{2x(15+8x^2+4x^4)}{(15+18x^2+12x^4+8x^6)}$$

$$R_6(x) = 2x\frac{(10395+4410x^2+1512x^4+432x^6+112x^8+32x^{10})}{(10395+11340x^2+6300x^4+2400x^6+720x^8+192x^{10}+64x^{12})}$$

$$R_6^{(2)}(x) = \frac{2x(675675+173250x^2+4788x^4+984x^6+152x^8+16x^{10})}{(675675+623700x^2+283500x^4+8400x^6+1800x^8+288x^{10}+32x^{12})}$$

	R_1	R_3	R_6	R_9	$R_3^{(1)}$	$R_6^{(1)}$	$R_9^{(3)}$
erreur maximale relative.	0,4	7.10^{-2}	10^{-2}	10^{-3}	5.10^{-2}	4.10^{-3}	10^{-4}

x	0,4	1,2	1,6	2	2,4	2,8	3,2	3,6	4,0	4,4
$R_9^{(3)}(x)$	.71989	.10146	.79989	.60263	.47063	.38716	.33097	.29010	.25870	.23367
Z(x)	.71989	.10145	.79988	.60268	.47063	.38710	.33092	.29008	.25870	.23367

dans ce dernier tableau on peut remarquer que l'erreur faite par l'approximant ne s'approche de l'erreur maximale que sur une petite zone de l'axe des x.

TABLEAU 3

Approximants de Padé de Z(x)

Lorsque z est très petit par rapport à u il faut prendre la précaution de faire un développement limité avant de remplacer Y(x) par R_k. En effet lorsqu'on calcule $f_1(z,u) = -\frac{\pi T_e}{8z}[F(p_+) - F(p_-)]$ si p_+ et p_- sont très proches, $[F(p_+) - F(p_-)]$ peut être de l'ordre de grandeur de l'erreur commise en utilisant un approximant et en divisant par z il peut en résulter une grosse erreur sur $f_1(z,u)$. (Ceci est particulièrement important pour $\frac{dE}{dx}$ où les petits z jouent un rôle dominant).

Lorsque z est petit, F(p) peut se développer en :

$$F(p_+) = F(u) + zF'(u) + \frac{z^2}{2} F''(u) + \frac{z^3}{6} F'''(u) + \ldots$$

$$F(p_-) = F(u) - zF'(u) + \frac{z^2}{2} F''(u) - \frac{z^3}{6} F'''(u) + \ldots$$

et $$f_1(z,u) = -\frac{\pi T_e}{4}\left[F'(u) + \frac{z^2}{6} F'''(u)\right] + \ldots$$

Ce développement se calcule aisément en gardant les mêmes approximants car $Z^{(n)}(x)$ s'exprime simplement en fonction de Z(x) :

$$Z'(x) = -2\left[1. + xZ(x)\right]$$

$$Z'''(x) = 4\left[2. + 4xZ(x) - 2x^2\left(1 + xZ(x)\right)\right]$$

Remarque

$\varepsilon(q,\omega)$ que nous venons de préciser dans la limite $T_e >> 1$ est plus complète que la constante diélectrique calculée dans un cadre classique car nous ne supposons pas que $\hbar$ tende vers zéro. En particulier les chocs proches sont traités de façon exacte dans le cadre de l'approximation de Born et en utilisant cette fonction diélectrique nous n'avons pas de divergence pour $\frac{dE}{dx}$ à grand z, ce qui n'est pas le cas dans un calcul classique.

Nous disposons donc, en acceptant une incertitude pouvant atteindre 1 %, d'une expression analytique simple de la fonction diélectrique dans le domaine $0 \leq T \leq 0{,}8\ T_F$ avec l'expression de Lindhard améliorée par Gouédard et dans le domaine $T \geq 20\ T_F$ avec

la limite de Fried et Conte approximée par des polynômes de Padé. Il nous reste donc le domaine, d'intérêt primordial pour la fusion rapide, de température comprise entre 0,8 T_F et 20 T_F où le calcul numérique s'impose.

III.3.d. CALCUL DE $\varepsilon(q,\omega)$ A DEGENERENSCE QUELCONQUE

Il faut noter, tout d'abord, que $f_1(z,u)$ et $f_2(z,u)$ ne dépendent que du paramètre T_e. Pour l'application au pouvoir d'arrêt nous avons calculé $\varepsilon(q,\omega)$ pour 3 valeurs de T_e :

$\alpha_e = 0,5$ $\qquad T_e = 0,76817$

$\alpha_e = 0,0$ $\qquad T_e = 0,98874$

$\alpha_e = -1,5$ $\qquad T_e = 2,3607$

(Dans la zone donc où aucune expression simple n'est connue).

Seule la partie réelle de $\varepsilon(q,\omega)$ doit être évaluée numériquement. Pour ce faire il est plus simple de passer par la relation de Kramers-Krönig plutôt que par l'expression générale (3.3), la série étant trop lentement convergente.

L'étude faite par Gouédard montre que la grandeur caractéristique de variation des fonctions $f_1(z,u)$ et $f_2(z,u)$ est $a_o(T_e)$ (aussi bien pour les z que pour les u).

$A_o(T_e)$ permet de passer continûment du cas dégénéré au cas non dégénéré. Ainsi, $a_o(T_e)v_F$ est de l'ordre de grandeur de la vitesse thermique électronique. En effet lorsque $T_e \to 0$, $v_F a_o(T_e) \to v_F$ et lorsque $T_e \to \infty$, $v_F a_o(T_e) \simeq \frac{\pi}{\sqrt{6}} v_{The}$ classique.

Nous pouvons donc supposer que $v_F a_o(T)$ représente la vitesse thermique électronique moyenne à dégénérescence quelconque.

u étant égal à $\frac{\omega}{q v_F}$, $\frac{u}{a_o(T_e)}$ donne le rapport entre vitesse de phase de l'onde sur vitesse thermique électronique. Ainsi lorsque

$u << a_o(T_e)$ les électrons répondent à un champ qui est pour eux quasiment statique et par contre, lorsque $u >> a_o(T_e)$ la dynamique des électrons est faible sur une période du champ électrique.

Pour obtenir une bonne précision dans le calcul de $f_1(z,u)$ il nous suffit donc de prendre un pas, entre les différentes valeurs de z et de u, petit devant $a_o(T_e)$.

La partie principale qu'il nous faut calculer est donc :

$$f_1(z,u) = \frac{T_e}{8z} \text{ P.P.} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{p^+ - p'} - \frac{1}{p^- - p'} \right] h(p')dp'$$

soit :

$$f_1(z,u) = \frac{T_e}{8z} \text{ P.P.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{p^+ - p'} \left[h(p') - h(p'-2z) \right] dp'$$

Il faut prendre deux précautions pour calculer numériquement cette intégrale :

* Eliminer le pôle de la partie principale. Ceci se fait en découpant l'intégrale autour de p^+ :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(x)dx}{p^+ - x} = \int_{-\infty}^{p_+ - a} \frac{g(x)dx}{p^+ - x} + \int_{p_+ - a}^{p_+ + a} \frac{g(x)dx}{p^+ - x} + \int_{p_+ + a}^{+\infty} \frac{g(x)dx}{p^+ - x}$$

La première intégrale et la troisième intégrale se calculent sans problème. Pour obtenir la deuxième, nous faisons un développement limité autour de p^+, ce qui donne :

$$\int_{p^+ - a}^{p^+ + a} \frac{g(x)dx}{p^+ - x} = -2ag'(p^+) - \frac{a^3}{9} g'''(p^+) + \ldots$$

De cette façon, en ayant choisi a petit devant $a_o(T_e)$, nous obtenons avec une bonne précision la partie principale demandée.

* Faire un développement limité lorsque $z \to 0$. L'ordinateur ayant une précision limitée ($\sim 10^{-8}$ en simple précision sur l'Univac 1110) ; lorsque $z \to 0$ il peut faire une erreur non négligeable sur $\frac{h(p') - h(p'-2z)}{z}$.

Une fois obtenu l'ensemble prescrit de valeurs de $f_1(z_i,u_i)$ nous obtenons une fonction continue (nécessaire pour l'introduire dans l'expression du pouvoir d'arrêt) en faisant une interpolation analytique entre chacun des points (z_i,z_{i+1}) et (u_i,u_{i+1}). Nous avons choisi de faire un prolongement parabolique, écrivant pour z compris entre z_i et z_{i+1} :

$$f(z,u_i) = \frac{1}{2}\left[a_i z^2 + b_i z + c_i + a_{i+1} z^2 + b_{i+1} z + c_{i+1}\right]$$

$a_i z^2 + b_{iz} + c_i$ étant la parabole qui passe par les points $f(z_{i-1},u_i)$, $f(z_i,u_i)$ et $f(z_{i+1},u_i)$.

La détermination de ces paraboles passe par la résolution d'un système d'équations linéaires (3,3), qui se fait facilement, par exemple, en appelant un sous-programme de la bibliothèque mathématique de l'ordinateur.

Cette interpolation parabolique nous permet, tout en gardant une précision fixée, d'élargir le pas entre les différents points et donc de gagner du temps de calcul.

Nous avons reporté trois des figures de la thèse de Gouédard (figure 3.2) et nos résultats pour les 3 températures de référence (figure 3.3). Les courbes des figures (3.2) sont portées à z constant alors que celles des figures (3.3) sont à u constant, l'intégration sur le pouvoir d'arrêt se faisant d'abord sur les z puis sur les u.

Ces courbes amènent quelques remarques :

- Le maximum de $f_1(u,z)$ ou de $f_2(u,z)$ avec u ou z comme variable est compris entre 0 et 1 et il décroît avec T_e.
- La variation de ces fonctions se fait sur une distance $a_o(T_e)$.

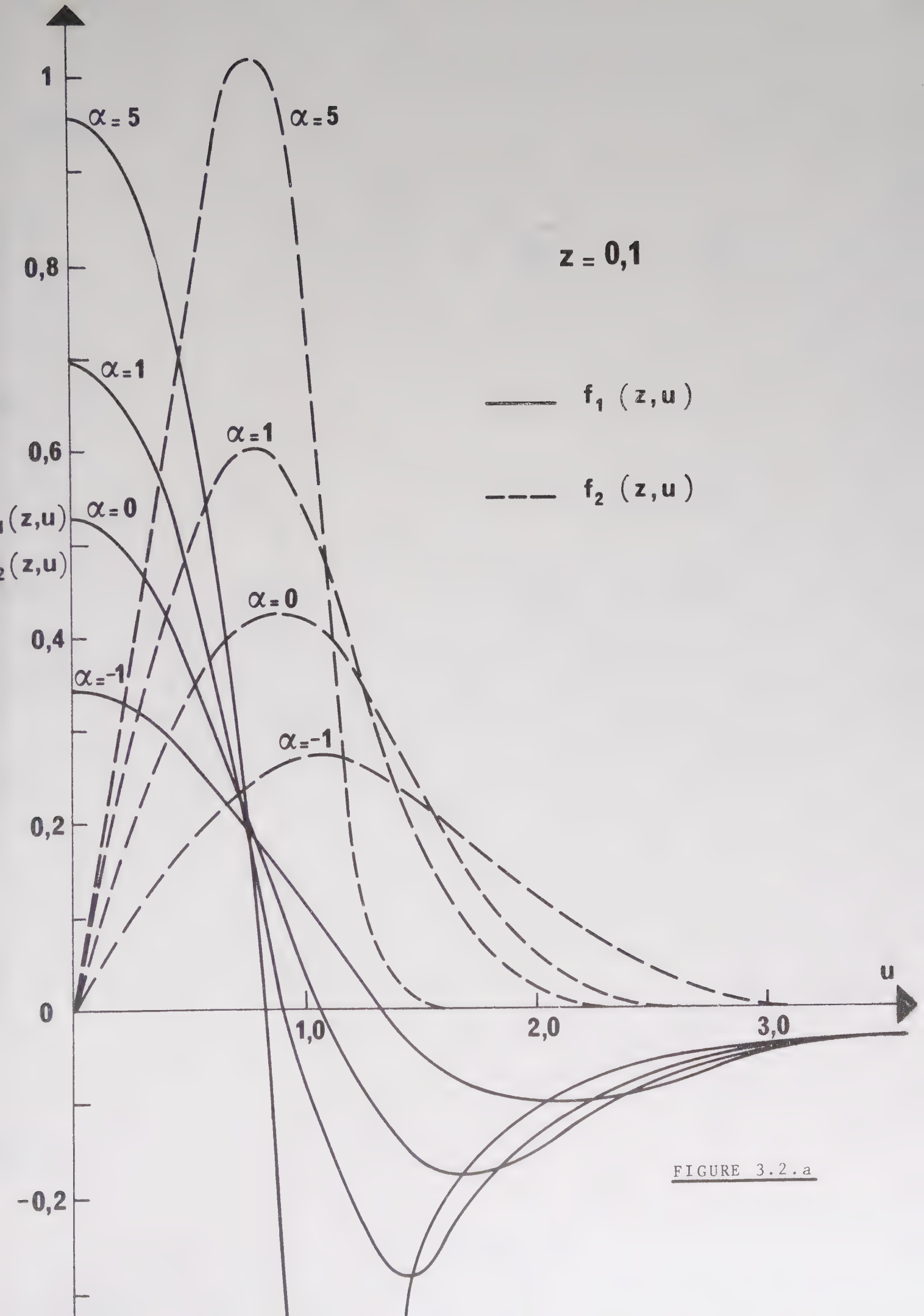


FIGURE 3.2.a

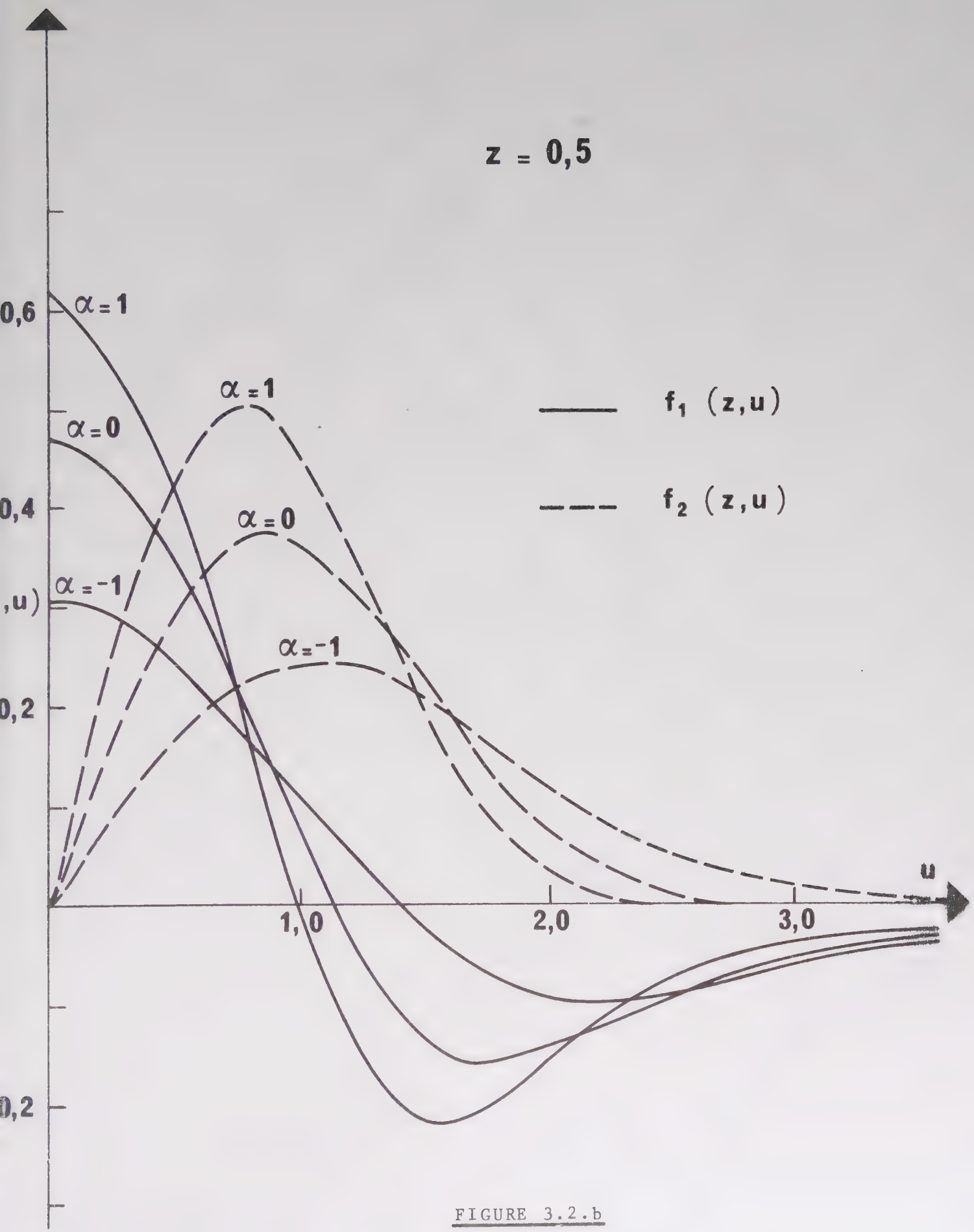


FIGURE 3.2.b

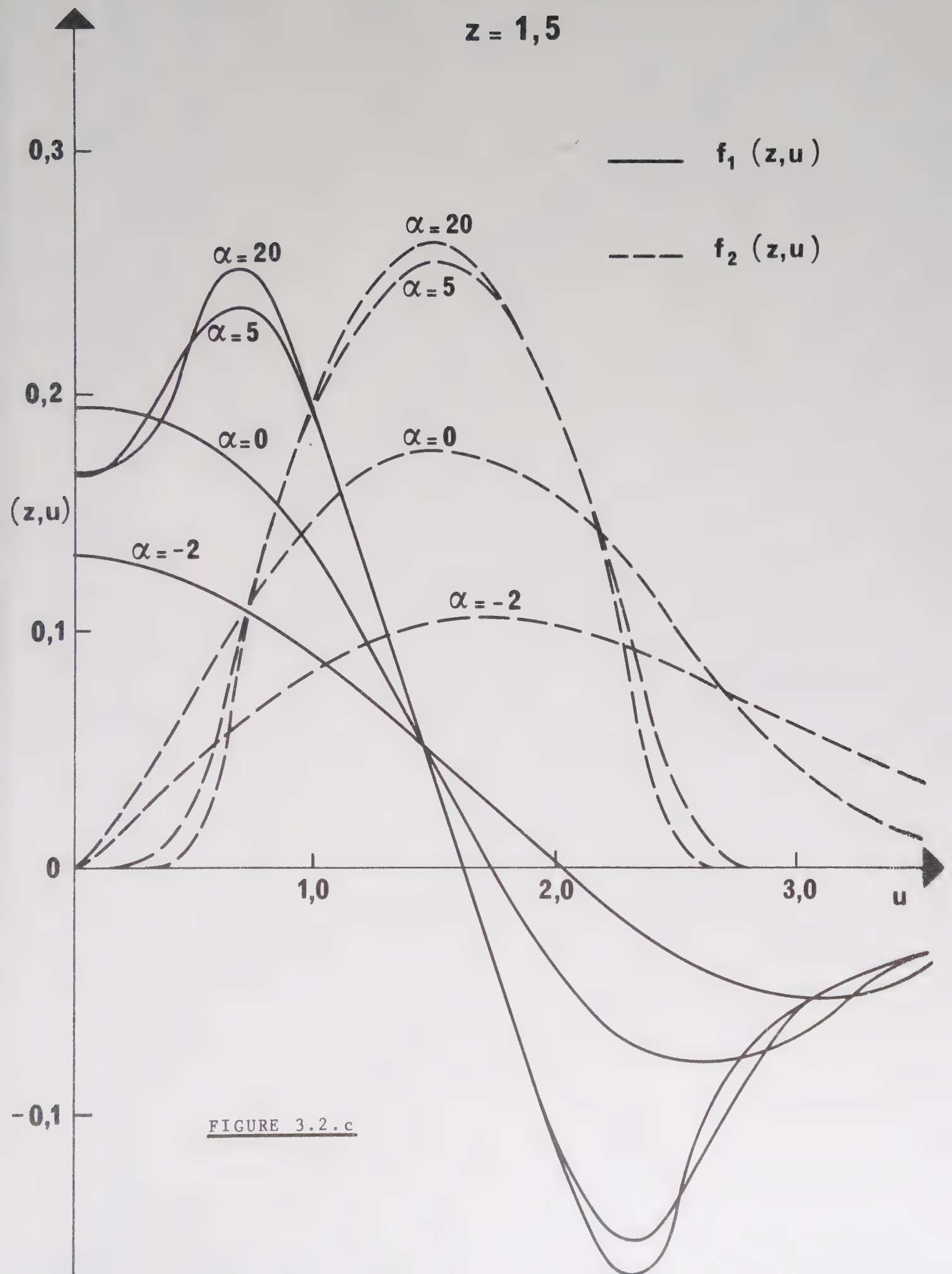


FIGURE 3.2.c

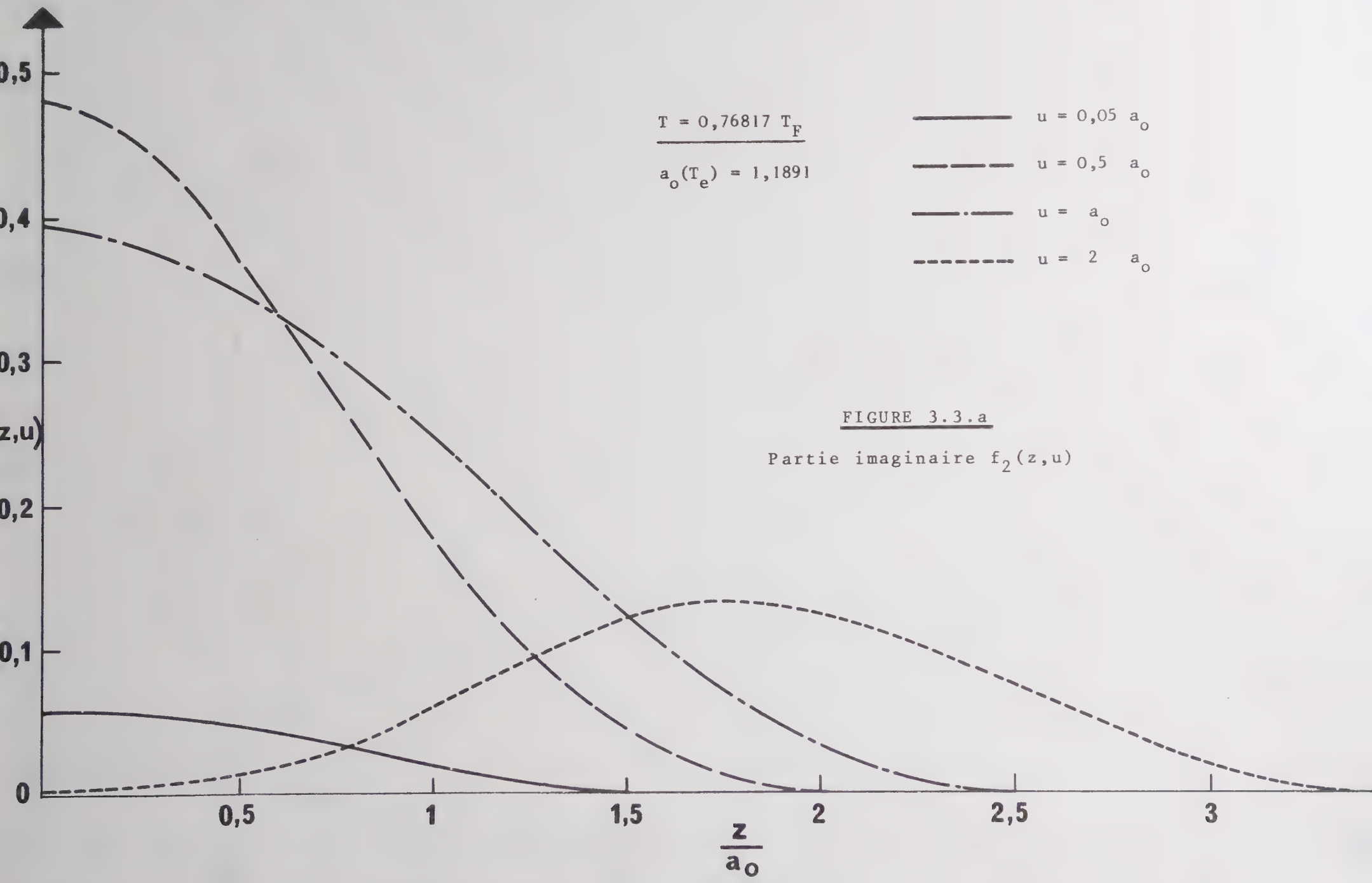


FIGURE 3.3.a

Partie imaginaire $f_2(z,u)$

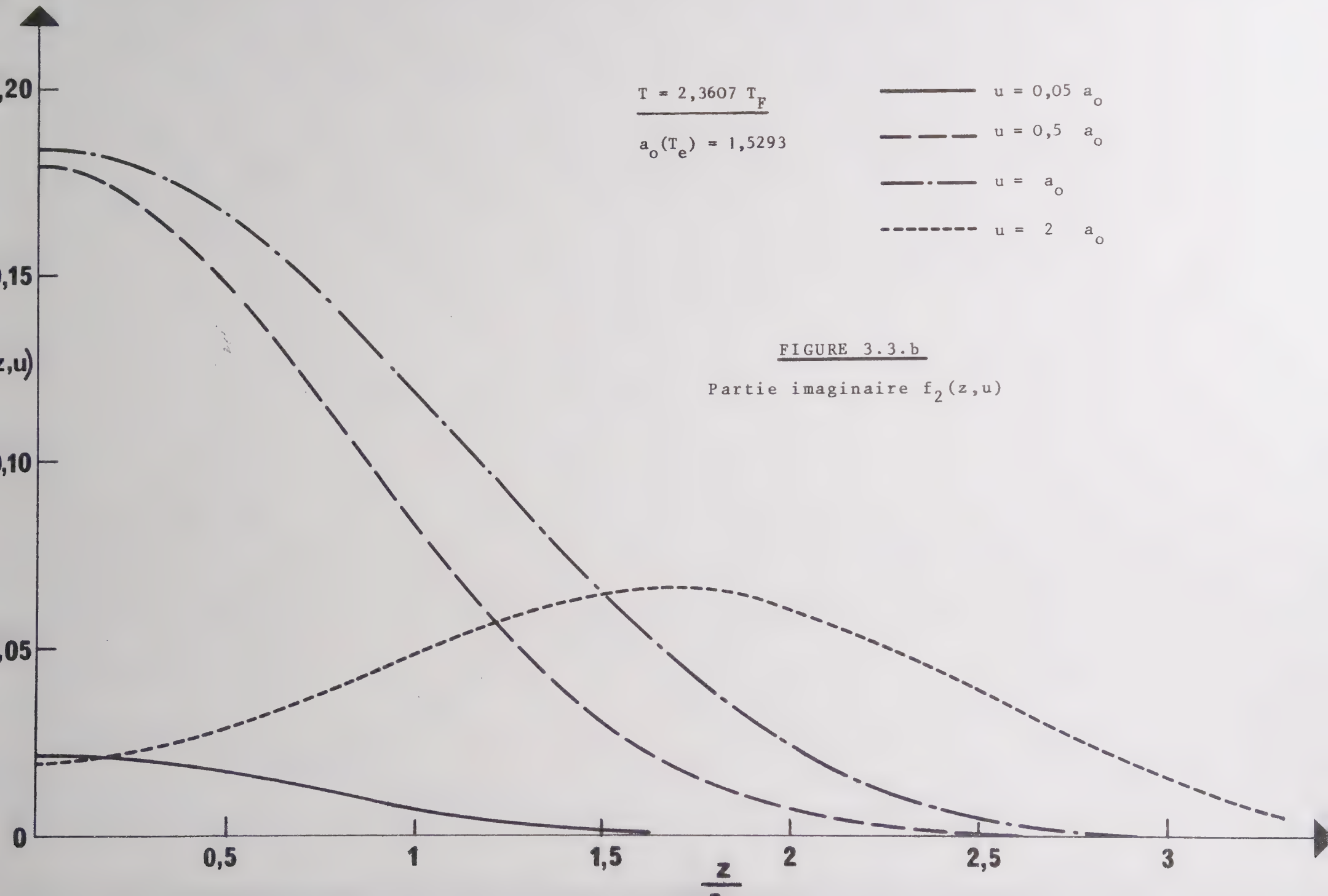


FIGURE 3.3.b

Partie imaginaire $f_2(z,u)$

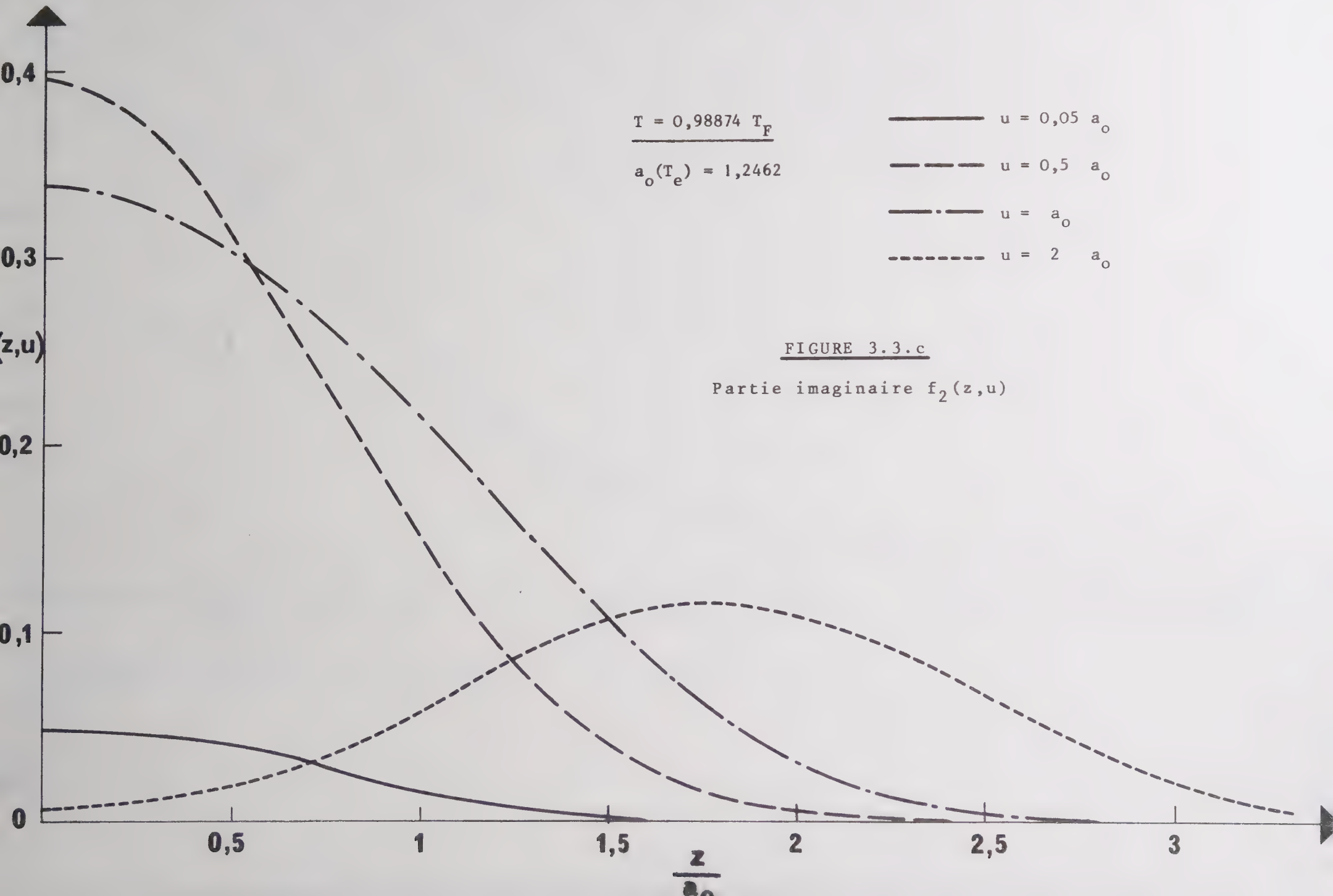


FIGURE 3.3.c

Partie imaginaire $f_2(z,u)$

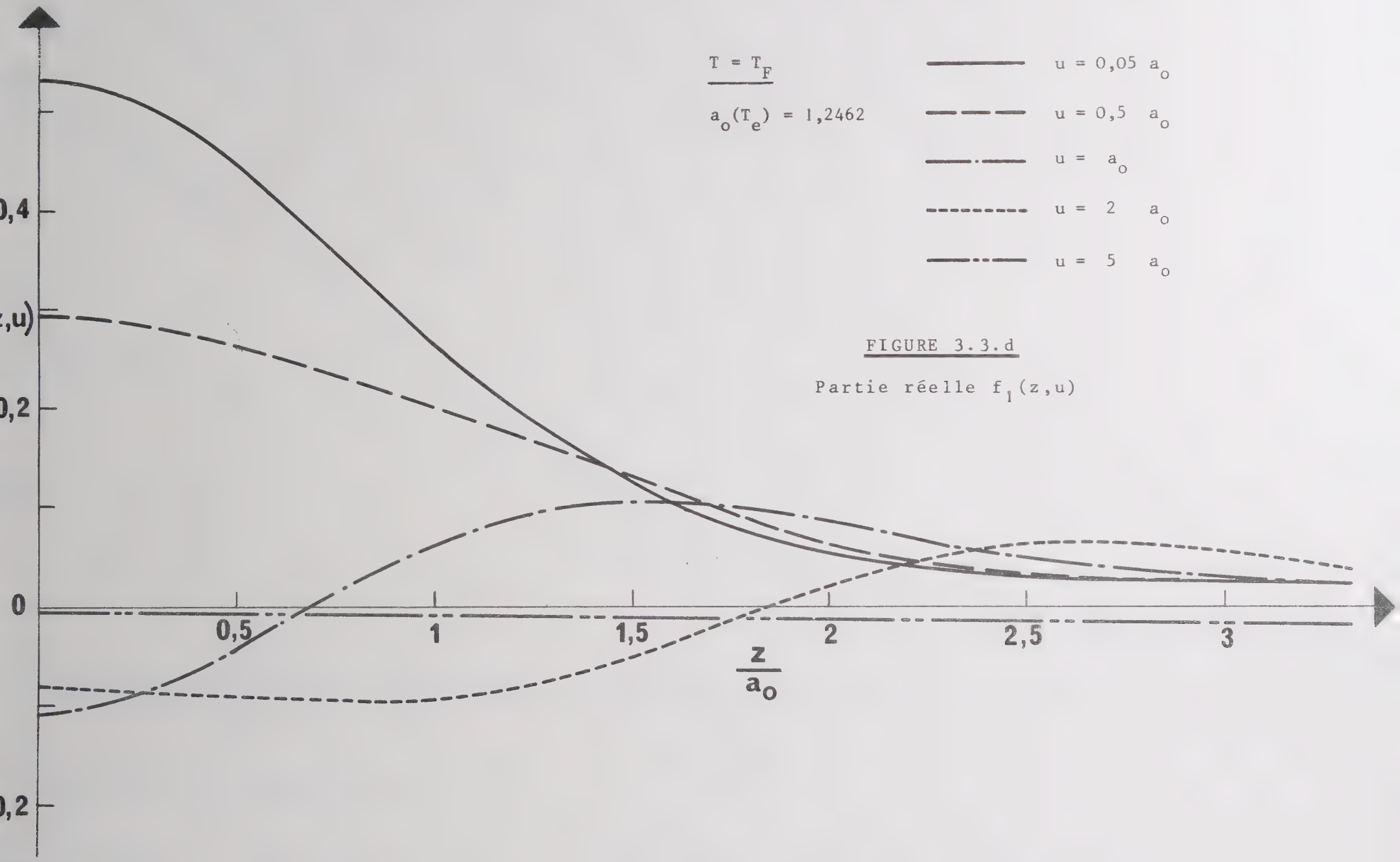


FIGURE 3.3.d

Partie réelle $f_1(z,u)$

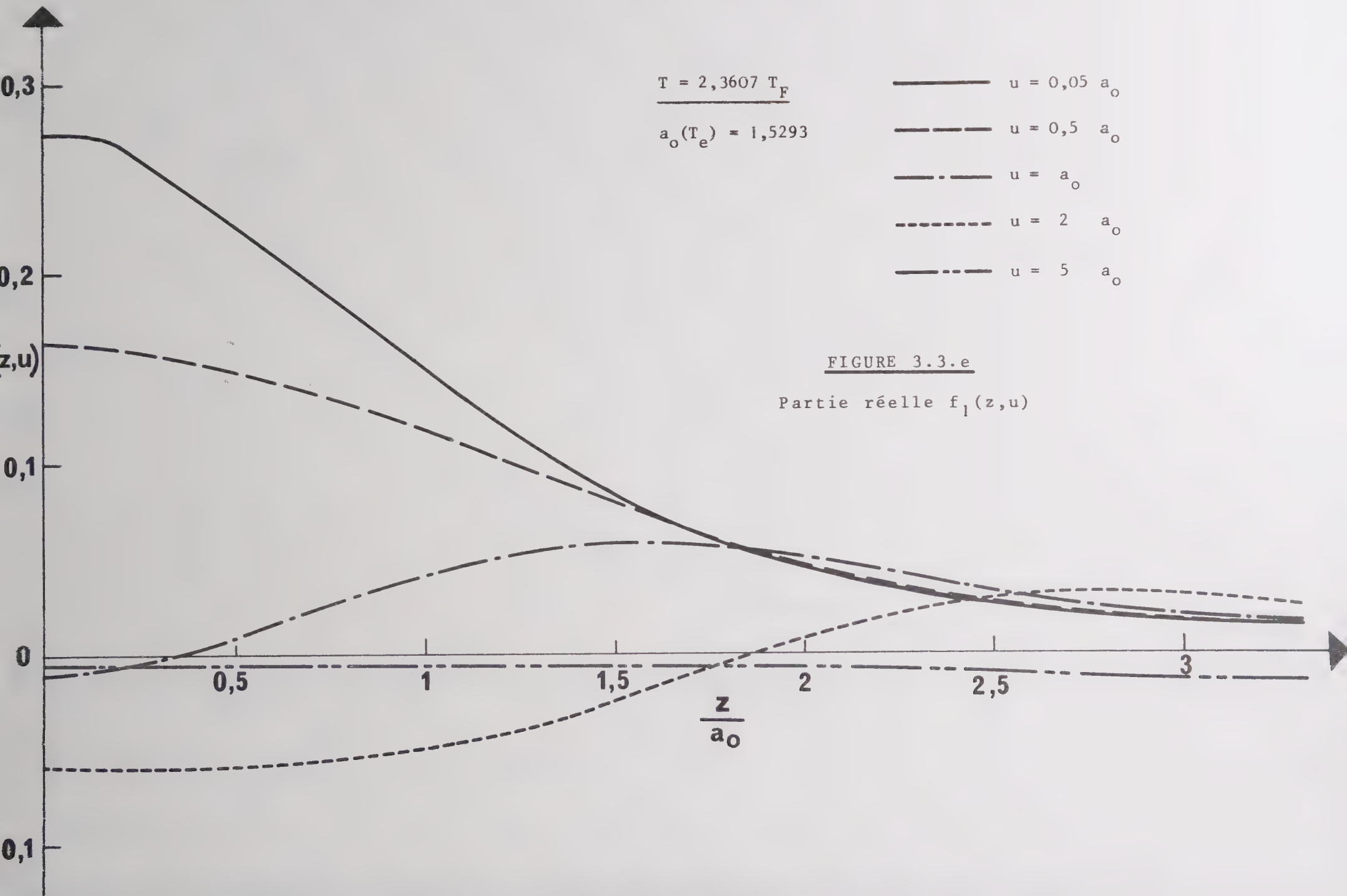


FIGURE 3.3.e

Partie réelle $f_1(z,u)$

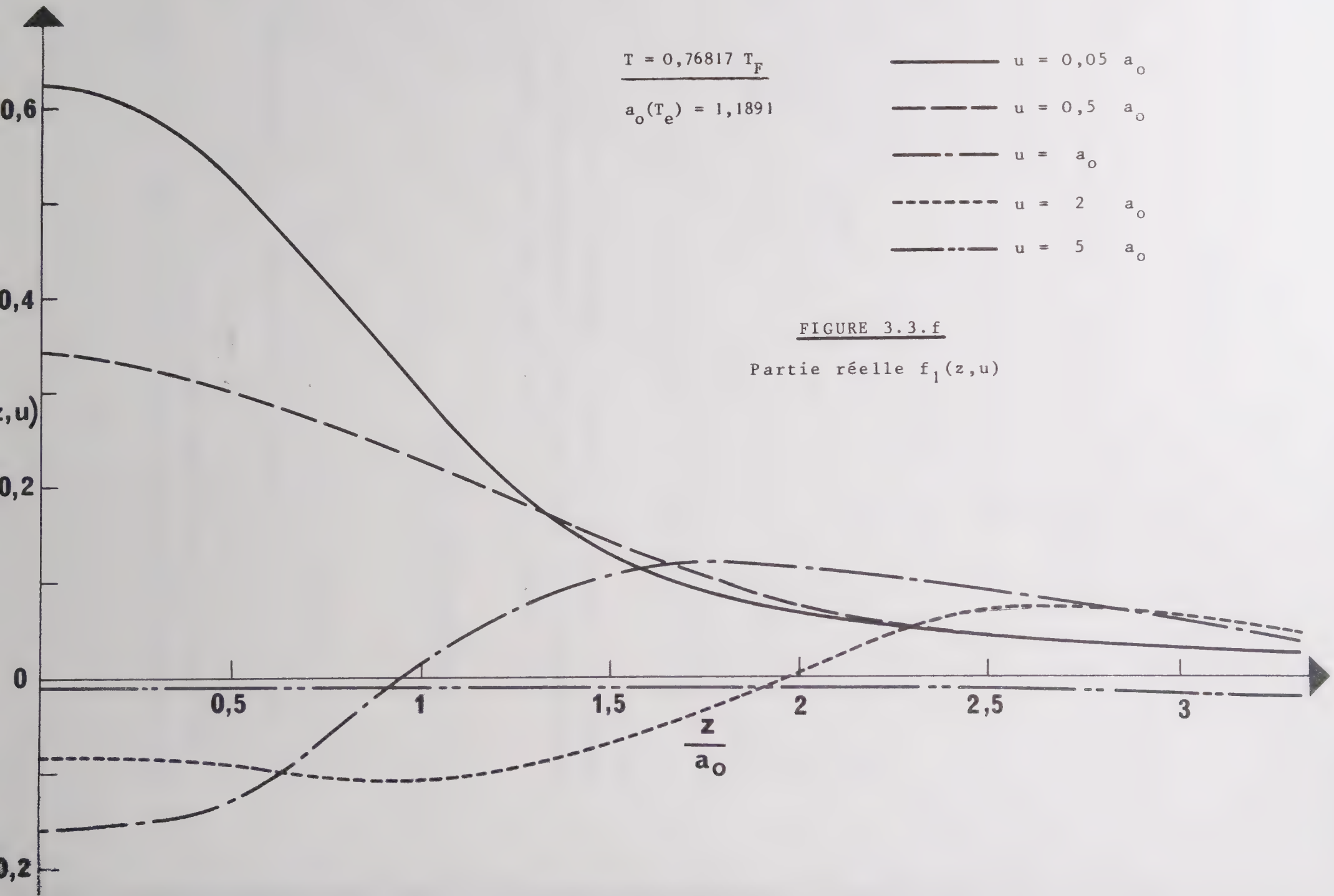


FIGURE 3.3.f

Partie réelle $f_1(z,u)$

- En étalonnant les u et les z avec $a_o(T_e)$ les courbes à différentes températures ont le même comportement.
- $f_2(z,u)$ s'annule rapidement dès que $|z-u| > 2a_o(T_e)$.
- La limite $u \to \infty$ à z constant est indépendante de la température.
- $f_1(z,u)$ ne devient négatif que pour $u \geq a_o(T_e)$.

III.4. RELATION DE DISPERSION

Une caractéristique typique d'un plasma est de montrer, pour certaines valeurs de ω et de q, des oscillations de champ longitudinal lorsque la relation de dispersion $\varepsilon(q,\omega) = 0$ est vérifiée.

Excepté à température nulle, une telle relation ne peut être satisfaite qu'avec ω complexe, les ondes étant donc amorties. Néanmoins, à grande vitesse de phase $\left(u >> a_o(T_e)\right)$, nous avons remarqué que $f_2(z,u)$ était très petite. Les ondes sont, dans ce cas, très peu amorties et peuvent être observées. Lorsque $\left(\varepsilon(q,\omega) \simeq 0\right)$ dans la formule du pouvoir d'arrêt ceci correspond à un pôle, il est donc important de préciser les conditions sur ω et sur z donnant une constante diélectrique nulle.

Rappelons que nous avons :

$$\varepsilon(z,u) = 1 + \frac{\alpha r s}{\pi z^2}\left[f_1(z,u) + i f_2(z,u)\right]$$

La relation de dispersion fait donc apparaitre T_e et n_e séparément comme paramètres. Nous allons étudier plus particulièrement le cas où l'A.P.A. est valable à toute température, c'est-à-dire où $\frac{\alpha r s}{\pi} << 1$.

En posant $\chi^2 = \frac{\alpha r s}{\pi}$ il faut donc obtenir :

$$z^2 = -\chi^2 f_1(z,u) \quad \text{et} \quad f_2(z,u) = 0 \qquad (3.12)$$

Nous pouvons déjà affirmer que les couples $(z_r, u_r+i\gamma_r)$ vérifiant (3.12) satisfont à $z_r << 1$, $u_r >> a_o(T_e)$, $\gamma_r << u_r$. γ_r s'obtient par :

$$0 = \mathrm{Im}\left[f_1(z_r,u_r+i\gamma_r) + i f_2(z_r,u_r+i\gamma_r) \right]$$

$$0 \simeq \mathrm{Im}\left[f_1(z_r,u_r) + i\gamma_r\left(\frac{\partial f_1}{\partial u}(z_r,u_r)\right) + i f_2(z_r,u_r) \right]$$

Soit : $$\gamma_r = - f_2(z_r,u_r) \times \frac{1}{\left[\frac{\partial f_1}{\partial u}(z_r,u)\right]_{u=u_r}} \qquad (3.13)$$

Le signe - confirmant que γ_r est un amortissement.

La relation liant z_r et u_r s'obtient en utilisant le développement donné plus haut de $f_1(z,u)$ à grand u et petit z :

$$f_1(z,u) \simeq - \frac{1}{4z}\left[\frac{2}{3}\left(\frac{1}{z+u} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \times \frac{T_e^n}{(z+u)^{2n+1}} \times \frac{F_{n+1/2}(\alpha^e)}{F_{1/2}(\alpha^e)}\right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{1}{z-u} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \times \frac{T_e^n}{(z-u)^{2n+1}} \times \frac{F_{n+1/2}(\alpha^e)}{F_{1/2}(\alpha^e)}\right)\right]$$

Le premier terme donne :

$$f_1(z,u) = \frac{-1}{2z_r \times 3}\left[\frac{2z_r}{u_r^2 - z_r^2}\right] \simeq - \frac{1}{3u_r^2}$$

qui conduit à $z_r^2 = \frac{\chi^2}{3u_r^2}$ relation équivalente à $\omega = \omega_p$.

χ^2 étant petit, l'expression de $f_1(z,u)$ est en fait le développement de deux infinimentspetits : $\frac{\chi^2}{u^2}$ et $\frac{1}{u^2}$, en négligeant les termes $\frac{\chi^2}{u^4}$ et $\frac{1}{u^6}$ (et au delà), on obtient :

$$f_1(z,u) = \frac{-1}{3u^2}\left[1 + \frac{T_e F_{3/2}(\alpha^e)}{u^2 F_{1/2}(\alpha^e)} + \frac{T_e^2 F_{5/2}(\alpha^e)}{u^4 \times F_{1/2}(\alpha^e)}\right]$$

$$\text{Soit :} \quad z_r^2 = \frac{\chi^2}{3u_r^2} \times \left[1 + \frac{T_e F_{3/2}(\alpha^e)}{u_r^2 F_{1/2}(\alpha^e)} + \frac{T_e^2 F_{5/2}(\alpha^e)}{u_r^4 F_{1/2}(\alpha^e)} \right] \qquad (3.14)$$

Avec comme limite :

$$* \; T_e \to 0 \qquad \omega_r^2 = \omega_p^2 \left[1 + \frac{3}{5} \frac{q^2 v_F^2}{\omega_p^2} - \frac{6}{35} \left(\frac{q^2 v_F^2}{\omega_p^2} \right)^2 \right]$$

$$* \; T_e \to \infty \qquad \omega_r^2 = \omega_p^2 \left[1 + \frac{3}{2} \frac{V_{th}^2 q^2}{\omega_p^2} - \frac{1}{4} \left(\frac{V_{th}^2 q^2}{\omega_q^2} \right)^2 \right]$$

$$\text{avec} \qquad V_{th}^2 = \frac{2k_B T}{m_e}$$

A densité quelconque seuls les deux premiers termes du développement restent valables.

Remarque

La limite z petit et $u \to \infty$ donne donc :

$$\varepsilon(q,\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$$

ω dans cette égalité peut être quelconque et *n'est pas* comme c'est souvent dit une limite *haute fréquence*, ω peut être plus petit que ω_p et $\varepsilon(q,\omega)$ peut aller jusqu'à moins l'infini. La limite $1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$ pour $\varepsilon(q,\omega)$ est une limite grande vitesse de phase par rapport à la vitesse thermique des électrons, le nombre d'onde restant petit.

* *
*

CHAPITRE IV

CALCUL DE LA CONTRIBUTION DES ELECTRONS LIBRES DANS LE POUVOIR D'ARRET

IV.1. POSITION DU PROBLEME

Nous calculons donc dans ce chapitre le terme γ donné dans l'introduction générale. Le plasma électrons ions est décrit ici par le modèle du Jellium, c'est-à-dire que nous négligeons l'interaction mutuelle entre électrons et ions, la présence des ions garantissant simplement l'électroneutralité du plasma. Ce modèle n'est valable que pour un plasma très dense ou très chaud, ce qui correspond au domaine de l'A.P.A.

Connaissant $\varepsilon(q,\omega)_{A.P.A.}$ du fluide d'électrons, décrite au chapitre précédent, nous pouvons calculer le pouvoir d'arrêt à l'aide de l'égalité (2.1) du deuxième chapitre. Avec les mêmes notations que précédemment, $\frac{dE}{dx}$ peut s'écrire :

$$\frac{dE}{dx} = \gamma = - \frac{Z^2 e^4}{4\pi\varepsilon_o^2 m_e v^2} \times n_e \times L_e \qquad (4.1)$$

avec $$L_e = - \frac{6}{\pi\chi^2} \int_o^{v/v_F} udu \int_o^{\infty} zdz \ \mathrm{Im} \frac{1}{\varepsilon(z,u)}$$

soit $$L_e = \frac{6}{\pi\chi^2} \int_o^{v/v_F} udu \int_o^{\infty} z^3 dz \frac{\chi^2 f_2(z,u)}{\left\{z^2+\chi^2 f_1(z,u)\right\}^2 + \left\{\chi^2 f_2(z,u)\right\}^2} \qquad (4.2)$$

L_e est un nombre sans dimension appelé *nombre d'arrêt*.

$\frac{dE}{dx}$ dépend de la température électronique par l'intermédiaire de $\varepsilon(z,u)$. Connaissant $\frac{dE}{dx}(v)$ pour une espèce d'ion (Z,M,E), il est

facile d'en déduire $\frac{dE'}{dx}(v')$ pour une espèce d'ion (Z',M',E'). On peut en effet écrire :

$$\frac{dE'}{dx}(Z',M',E') = \frac{Z'^2}{Z^2} \frac{dE}{dx}(Z,M,\frac{M}{M'} E') \qquad (4.3)$$

C'est pourquoi, dans les applications, nous n'indiquerons le résultat que pour un faisceau de protons.

Rappelons que nous avons obtenu l'expression (4.1) en supposant :

* L'énergie incidente de l'ion incident est grande devant l'énergie des électrons et des ions du plasma. Ainsi la trajectoire de l'ion incident est pratiquement rectiligne et l'énergie de recul lors d'un choc est négligeable.

* L'ion incident est ponctuel de charge Z constante, il n'y a pas d'échange de charge.

* Le gaz d'électrons est essentiellement cinétique (A.P.A.).

IV.2. PRECISIONS SUR LE CALCUL

Nous avons vu que si l'on normalisait z et u par rapport à $a_o(T_e)$, la constante diélectrique avait un comportement semblable à différentes températures. On s'attend donc à ce qu'il en soit de même pour le pouvoir d'arrêt. Il est donc inutile de préciser le calcul pour toutes les températures.

Le calcul du pouvoir d'arrêt classique ($T >> T_F$, $\hbar \to 0$) a déjà été fait [9] et de même à $T_e = 0$, Lindhard a obtenu un résultat semblable au nôtre [10]. Nous allons donc préciser le calcul dans la zone intermédiaire, qui est précisément celle de la Fusion Inertielle, en prenant les trois exemples du chapitre précédent : $T_e = 0,768$, $T_e = 0,989$, $T_e = 2,36$.

Nous nous sommes assignés comme précision de calcul au moins quatre chiffres significatifs. C'est-à-dire qu'en augmentant le temps de calcul, par rapport à ce que nous avons fait, les quatre premiers chiffres significatifs demeurent inchangés.

L'intégration a lieu d'abord sur les z puis sur les u où la limite d'intégration donne la dépendance, par rapport à la vitesse, du nombre d'arrêt.

Bien que z doive varier, dans l'intégrale, de 0 à l'infini il n'y a pas lieu de calculer $f_1(z,u)$ pour les grands z. En effet le calcul A.P.A. supposant $\chi^2 << 1$, nous avons fait le calcul pour 5 densités d'électrons : $n_e = 10^{25}$ cm^{-3}, $n_e = 10^{26}$ cm^{-3}, $n_e = 10^{27}$ cm^{-3} $n_e = 10^{28}$ cm^{-3} et $n_e = 10^{29}$ cm^{-3}. Au delà les effets relativistes seraient trop importants. Pour ces densités χ^2 vaut :

n_e (cm^{-3})	10^{25}	10^{26}	10^{27}	10^{28}	10^{29}
χ^2	0.09	0.04	0.02	0.009	0.004

Ces valeurs de χ^2 nous permettent de négliger $\chi^2 f_1(z,u)$ devant z^2 dès que z atteint quelques unités. On retrouve bien que l'écrantage ne joue un rôle qu'aux grandes distances.

De plus nous verrons que pour $u > 2$ ou $3\ a_o(T_e)$, une formule asymptotique prendra le relais du calcul numérique.

Nous avons donc fait un tableau pour $f_1(z,u)$ en prenant 200 valeurs pour z entre 0 et 6 a_o et 150 valeurs pour u entre 0 et 7,5 a_o. Ce qui nous donne 30 000 calculs de $f_1(z,u)$ pour chaque température réduite. Pour u fixé, l'interpolation parabolique, décrite plus haut, nous donne, pour $f_1(z,u)$, une fonction continue de z.

IV.3. VARIATION DE L'INTEGRANT

Nous pouvons distinguer trois valeurs pour les vitesses de phase u :

a) $u << a_o(T_e)$

Dans ce cas $f_1(z,u) > 0$, la constante diélectrique n'a donc pas de pôle. $f_1(z,u)$ assure la convergence de l'intégrale pour $z \to 0$ (écrantage genre Debye ou Thoma-Fermi suivant la température). La partie imaginaire $f_2(z,u)$, qui assure le traitement quantique des chocs proches, garantit aussi la convergence lorsque $z \to \infty$. Ce n'est pas le cas d'un traitement classique dans lequel on est obligé de couper l'intégrale pour les grands z.

L'essentiel du pouvoir d'arrêt pour $u << a_o(T_e)$ provient de la contribution des grandes distances. L'écrantage par la constante diélectrique est donc, dans ce cas, essentiel. Lorsque la densité du fluide d'électrons est suffisamment importante, nous pouvons simplifier la partie réelle de la constante diélectrique en prenant sa valeur à q = 0, nous posons alors :

$$z^2 + \chi^2 f_1(z,u) \simeq z^2 + \chi^2 f_1(0,u)$$

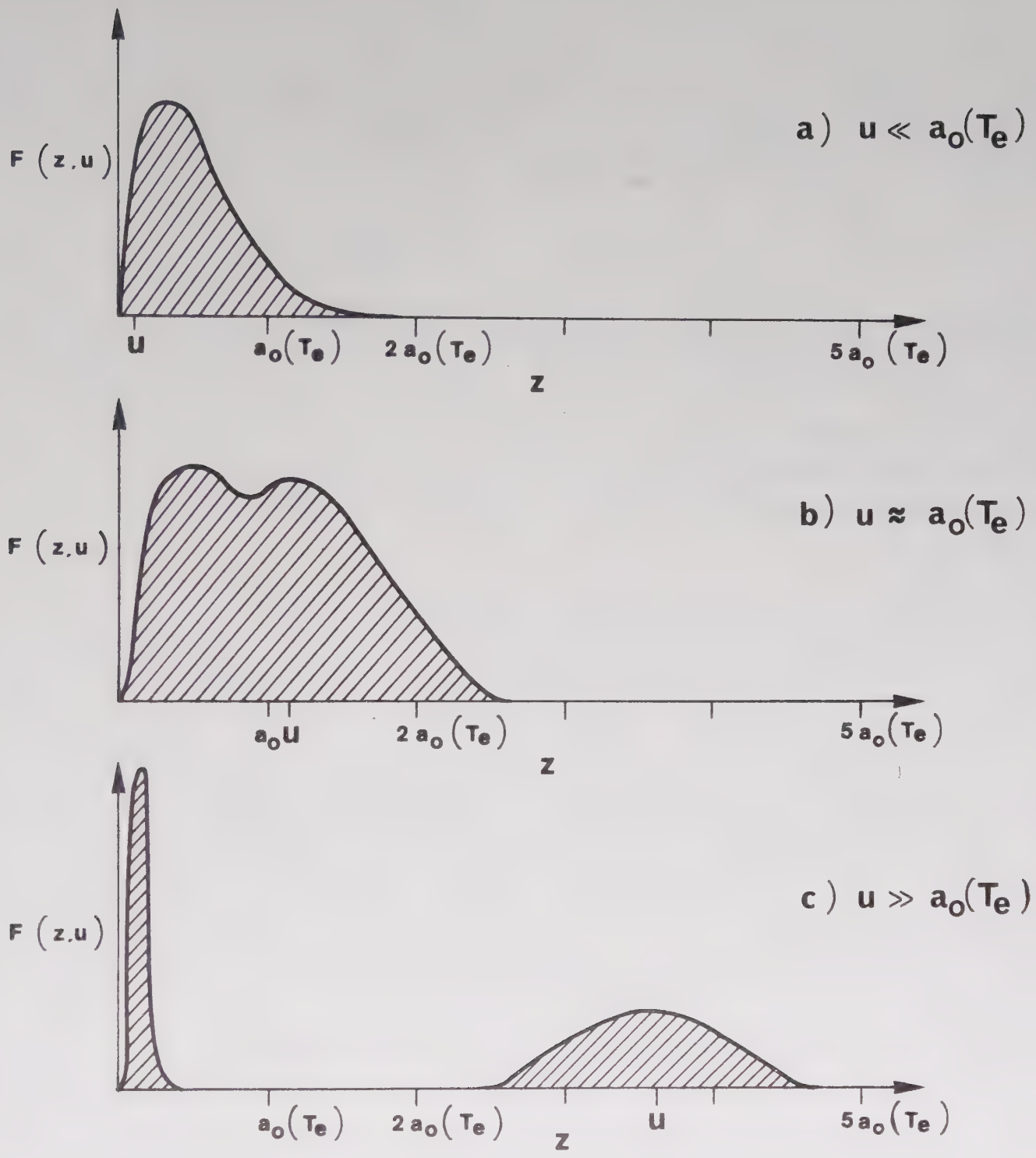
En effet pour $\chi^2 << a_o(T_e)$ on peut trouver z_1 tel que : $\chi^2 << z_1 << a_o(T_e)$ et ainsi :

$$- z \leq z_1 \qquad z^2 + \chi^2 f_1(z,u) \simeq z^2 + \chi^2 f_1(0,u)$$

$$- z \geq z_1 \qquad z^2 + \chi^2 f_1(z,u) = z^2 \simeq z^2 + \chi^2 f_1(0,u)$$

b) $u \simeq a_o(T_e)$

La partie réelle de $\varepsilon(q,\omega)$ peut s'annuler mais, $f_2(z,u)$ demeurant important, il n'y a pas de résonance plasma. Les z plus



$F(z,u)$ = intégrant dans l'expression du nombre d'arrêt

FIGURE 4.1

Variation de l'intégrant $F(z,u)$ qui contribue au nombre d'arrêt, en fonction de z

a) à faible vitesse de phase
b) à vitesse de phase de l'ordre de la vitesse thermique
c) à grande vitesse de phase

importants viennent s'ajouter pour contribuer au freinage de l'ion incident et, aux chocs lointains, s'additionnent les chocs multiples à une distance de notre ion de l'ordre de la longueur d'écrantage.

c) $u >> a_o(T_e)$

La partie réelle de $\varepsilon(q,\mu)$ s'annule à $z = z_r$ et, $f_2(z_r,u)$ étant pratiquement nulle, nous avons en fait un pôle pour l'intégrale. La perte d'énergie se fait au profit du mode plasma à $\omega = \omega_p$. Une deuxième contribution provient des chocs proches. Il s'agit de chocs binaires pour z proche de u, ces chocs ayant lieu à une distance faible devant la longueur d'écrantage, celui-ci peut être négligé.

On peut résumer ces considérations sur trois graphes correspondants aux trois domaines décrits. Nous avons représenté figure (4.1) les variations de l'intégrant en fonction de z.

Remarque

Nous avons dit que la théorie classique donne une divergence du pouvoir d'arrêt lorsque z tend vers l'infini. Pour éliminer ce problème on peut [9] traiter de façon exacte les chocs proches [ce qui en mécanique classique est en dehors du cadre de l'approximation linéaire]. Ainsi l'échange maximal d'énergie se trouve limité par $2\times m v_R^2$ et l'intégrale devient convergente.

La question qui se pose alors est de savoir s'il est compatible de traiter le choc classique exactement tout en négligeant le terme en $\hbar$. On peut spéculer que ce genre de calcul cesse d'être valable lorsque la longueur de Broglie moyenne électronique, $\lambda\!\!\!^{-}$, devient égale à la distance moyenne de plus courte approche notée R_L.

Nous avons $R_L = \dfrac{2Ze^2}{m_e v_R^2}$ (v_R = vitesse relative moyenne $\simeq \sqrt{v^2 + \dfrac{2kT}{m_e}}$

et $$\lambda\!\!\!^{-} = \frac{\hbar}{\sqrt{2 m_e k T_e}}$$

En prenant le maximum possible pour R_L obtenu à $v_R = \sqrt{\frac{2k_BT}{m_e}}$ l'égalité a lieu pour $T = Z^2 \times 157860$ K,

et en notant $y = \frac{v_R}{v_{THe}}$ pour y quelconque ($y \geq 1$)

l'égalité a lieu pour $T = \frac{Z^2 \times 157860\ K}{y} = T_{lim}$.

Ainsi lorsque $T > T_{lim}$ il faut traiter les chocs en mécanique quantique. Les termes en $\hbar$ donnant une contribution plus importante que l'énergie de recul.

On peut par contre remarquer que lorsque $T < T_{lim}$, l'approximation de Born au premier ordre doit être améliorée pour donner une précision analogue au calcul classique corrigé.

IV.4. CONTRIBUTION DE LA RESONANCE

Le calcul numérique de l'intégrale sur les z ne peut pas se faire dans la zone c), au voisinage de la résonance. Il nous faut donc, dans ce cas, prendre des précautions supplémentaires.

En effet nous pouvons poser :

$$\text{Valeur numérique de } \left(z^2+\chi^2 f_1(z,u)\right) = \text{Valeur exacte de } \left(z^2+\chi^2 f_1'(z,u)\right) + \delta$$

δ étant l'erreur commise dans le calcul de $f_1(z,u)$ $\left(\delta \simeq 10^{-5} \times f_1(z,u)\right)$

En particulier, lorsque $z = z_r$, la valeur numérique du dénominateur de l'intégrant est :

$$\delta^2 + \left(\chi^2 f_2(z_r,u)\right)^2$$

Tant que $f_2(z_r,u)$ reste de l'ordre de $f_1(z_r,u)$, δ^2 reste négligeable. Mais dès que $f_2(z_r,u) < f_1(z_r,u)/100$ on commet une erreur non négligeable qui peut devenir très importante à grand u.

Pour pallier à cette première erreur nous avons fait un développement limité de $f_1(z,u)$ pour z petit autour de z_r. Soit :

$$f_1(z,u) = f_1(z_r,u) + (z-z_r)f_1'(z_r,u) + (z-z_r)^2 \frac{f_1''(z_r,u)}{2} + \ldots$$

et les coefficients $f_1'(z_r,u)$ et $f_1''(z_r,u)$ ont été calculés numériquement. Nous avons alors remplacé autour de z_r le dénominateur de l'intégrant par :

$$(z-z_r)^2\left[(z+z_r) + f_1'(z_u,u) + (z-z_r)\ \frac{f_1''(z_r,u)}{2}\right]^2 + \left[\chi^2 f_2(z,u)\right]^2 \qquad (4.4)$$

expression qui a le comportement attendu au voisinage de $z = z_r$. L'erreur est alors reportée sur un décalage de z_r (toujours de l'ordre de 10^{-5} z_r), cette différence produit sur le calcul une erreur du même ordre pour l'intégrant et est donc compatible avec la précision demandée.

Nous avons vu que z_r était de l'ordre de $\frac{1}{u}\sqrt{\frac{\chi^2}{3}}$, χ^2 étant petit et u étant $\geq a_o(T_e)$, z_r est donc toujours petit devant $a_o(T_e)$. Ceci nous permet de simplifier le développement (4.4) :

En négligeant les termes en z^4 nous obtenons :

$$f_1'(z,u) = -\frac{\pi T_e}{8}\, z^2 F'''(u)$$

avec $$F'''(u) = \frac{1}{3\pi T_e}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p'}{(u-p')^3} \times \frac{1}{\left[1 + e^{\frac{p'^2-\gamma}{T_e}}\right]}$$

Cette grandeur $F'''(u)$ a donc été calculée numériquement pour toute valeur de $u \geq a_o(T_e)$ et introduite dans la formule (4.4) pour donner :

$$\left[z^2+\chi^2 f_1(z,u)\right]^2 + \left[\chi^2 f_2(z,u)\right]^2 = (z-z_r)^2\left[\chi^2 \frac{\pi T_e}{8} z z_r F'''(u) - (z+z_r)\right]^2 + \left[\chi^2 f_2(z,u)\right]^2$$

La barre de la précision à 10^{-5} étant franchie il va apparaitre la précision limitée de l'ordinateur. Ayant fixé celle des calculs à 10^{-5} il nous a paru inutile d'utiliser le système double précision qui consomme beaucoup de temps de calcul et empêche d'utiliser certains programmes de la bibliothèque mathématique. En simple précision l'ordinateur donne 7 chiffres significatifs donc dès que $f_2(z_r,u) \leq f_1(z_r,u) \times 10^{-5}$ l'erreur commise en soustrayant $(z-z_r)$ n'est plus négligeable devant $f_2(z_r,u)$. Il faut donc pour de telles valeurs de u abandonner le calcul numérique. En fait à ce niveau l'intégrant se rapproche d'une fonction delta et s'intègre donc aisément.

En effet supposons que $f_2(z_r,u) \leq f_1(z_r,u) \times 10^{-5}$.

Pour $z = z_r$ le dénominateur de l'intégrant vaut $\chi^2 f_2^2(z_r,u)$. Pour $z = 0{,}999\ z_r$ et $z_r = 1{,}001\ z_r$ ce dénominateur se trouve multiplié par au moins 4×10^4. Pratiquement donc toute la valeur de l'intégrale aux petits z provient de l'intervalle $z = 0{,}999\ z_r$ et $z = 1{,}001\ z_r$ et, comme $z_r << a_o(T_e)$, $f_2(z,u)$ peut être considérée comme constante, égale à ε_i ($\varepsilon_i << z_r^2$). Nous obtenons donc pour la contribution de la résonance au nombre d'arrêt :

$$\underset{\text{Résonance}}{\int_0^\infty} \frac{z^3 dz f_2(z,u)}{\left[(z^2+\chi^2 f_1(z,u)\right]^2 + \left[\chi^2 f_2(z,u)\right]^2} = \int_{z_2-\alpha}^{z_2+\alpha} \frac{z^3 dz \chi^2 \varepsilon_i}{\left[(z-z_r)A\right]^2 + (\chi^2 \varepsilon_i)^2}$$

α étant inférieur à $10^{-3}\ z_r$ et $\alpha >> \chi^2 \varepsilon_i$

et $$A = 2z_r + \chi^2 \left(\frac{\partial f_1(z,u)}{\partial z}\right)_{z=z_r}$$

ce qui nous donne pour la partie résonnante de l'intégrale en z :

$$\text{Partie résonnante} = \frac{\pi}{2} \frac{z_r^2(u) \times u \times du}{1 + \frac{\chi^2}{2 z_r} \left(\frac{\partial f_1(z,u)}{\partial z} \right)_{z=z_r}} \qquad (4.5)$$

En effet le terme z^3 s'écrit $(z_r + x)^3$ avec $x \leq 10^{-3}\ z_r$ soit : $(z_r + x)^3 = z_r^3 + x^3 + 3x^2 z_r + 3x z_r^2$. La symétrie nous permet d'éliminer les termes en x et en x^3 pour l'intégrale. Le terme en x^2 étant $\leq 10^{-6}\ z_r^3$ peut également être négligé.

Finalement pour nous résumer, autour de $z = z_r$:

* $u \simeq a_o(T_e)$

$f_2(z_r,u) \geq f_1(z_r,u) \times 10^{-2}$ intégration numérique simple

* $a_o(T_e) < u \leq 2a_o(T_e)$

$10^{-5}\ f_1(z_r,u) \leq f_2(z_r,u) \leq 10^{-2}\ f_1(z_r,u)$

intégration numérique en remplaçant la partie réelle de $\varepsilon(z,u)$ par son développement limité autour de $z = z_r$.

* $u \geq 2a_o(T_e)$

$f_2(z_r,u) \leq 10^{-5}\ f_1(z_r,u)$

Résultat donné par (4.5) avec $z_r(u)$ calculé numériquement.

Les résultats du calcul pour le pouvoir d'arrêt sont reportés sur les figures (4.2, 4.3, 4.4, 4.5) :

figure (4.2) pour $u < a_o(T_e)$
figure (4.3) pour $u > a_o(T_e)$
figures (4.4) et (4.5) dépendance de $\frac{dE}{dx}$ avec T_e et n_e.

IV.5. LIMITE DU POUVOIR D'ARRET LORSQUE $v << v_{THe}$

Cette étude a déjà été faite dans [11], [12], [13] en simplifiant légèrement le problème.

Nous sommes dans le cas où $v << v_F \times a_o(T_e)$, soit $u << a_o(T_e)$: les électrons répondent à un champ quasiment statique.

On peut développer l'intégrant, par rapport à u, au 1er ordre :

$$\frac{f_2(z,u)}{[z^2+\chi^2 f_1(z,u)]^2 + [\chi^2 f_2(z,u)]^2} \simeq \frac{u\left(\frac{\partial f_2(z,u)}{\partial u}\right)_{u=0}}{[z^2+\chi^2 f_1(z,0)]^2}$$

où nous avons utilisé le fait que $f_2(z,0) = 0$.

Le nombre d'arrêt devient alors :

$$L_e = \frac{6}{\pi\chi^2} \int_o^{\frac{v}{vF}} u^2 du \int_o^{\infty} \frac{z^3 dz \chi^2 \left(\frac{\partial f_2(z,u)}{\partial u}\right)_{u=0}}{[z^2+\chi^2 f_1(z,0)]^2}$$

Soit $$L_e = \frac{2}{\pi}\left(\frac{v}{v_F}\right)^3 \times \int_o^{\infty} \frac{z^3 dz \left(\frac{\partial f_2(z,u)}{\partial u}\right)_{u=0}}{[z^2+\chi^2 f_1(z,0)]^2}$$

Cela donne :

$$\frac{dE}{dx} = \frac{Z^2 e^4}{2\pi^2 \varepsilon_o^2 m_e v_F^2} \times n_e \left(\frac{v}{a_o(T_e) \times v_F}\right) \times \text{Log } \Lambda_{A.P.A.} \qquad (4.6)$$

avec $$\text{Log}_{A.P.A.} = \frac{\pi a_o(T_e)}{2} \int_o^{\infty} \frac{z^3 dz}{[z^2+\chi^2 f_1(z,0)]^2} \times \frac{1}{\left[1 + e^{\frac{z^2-\gamma}{T_e}}\right]} \qquad (4.7)$$

Nous retrouvons le résultat bien connu qu'à faible énergie incidente, le pouvoir d'arrêt est proportionnel à la vitesse de l'ion incident.

Comme nous l'avons déjà remarqué, pour un fluide suffisamment dense, on peut remplacer dans (4.7) $f_1(z,0)$ par $f_1(0,0)$.

Pour notre calcul l'erreur maximale commise sur $\text{Log}_{\text{A.P.A.}}$ en utilisant cette simplification a lieu pour $n_e = 10^{25}$ cm^{-3} et $T_e = 0.768$. Nous avons alors :

$$\text{Log}_{\text{A.P.A.}} \text{ exact} = 1{,}136, \quad \text{Log}_{\text{A.P.A.}} \text{ approché} = 1{,}093$$

soit une erreur de 4 %.
C'est cette valeur approchée de $\text{Log}_{\text{A.P.A.}}$ qui a été utilisée dans [11], [12], [13].

$\chi^2 f_1(z,0)$ représente l'écrantage statique et nous retrouvons les limites haute et basse températures :

$$z^2 + \chi^2 f_1(0,0) = \begin{cases} \dfrac{1}{4q_F^2}\left[q^2 + \lambda_{TF}^{-2}\right] & (T_e \to 0) \\ \dfrac{1}{4q_F^2}\left[q^2 + \lambda_D^{-2}\right] & (T_e \to \infty) \end{cases}$$

a) Limite de $\text{Log } \Lambda_{\text{A.P.A.}}$ pour $T_e >> 1$

$$I = \int_0^\infty \frac{z^3 dz}{\left[z^2+\chi^2 f_1(0,0)\right]^2} \quad \frac{1}{\left[1 + e^{\frac{z^2-\gamma}{T_e}}\right]} = \frac{e^{\alpha^e}}{2} \int_0^\infty \frac{x dx e^{-x}}{(x+A)^2}$$

$$\left(A = \frac{\chi^2 f_1(0,0)}{T_e}\right)$$

$$\text{d'où : } I = \frac{e^{\alpha^e}}{2} \left\{\left[\left\{(1+A)\text{Log}(x+A) + \frac{A}{x+A}\right\}e^{-x}\right]_0^{+\infty} + (1+A)e^{-A}\left[\int_0^\infty \text{Log } x e^{-x} - \int_0^A \text{Log } x e^{-x}\right]\right\}$$

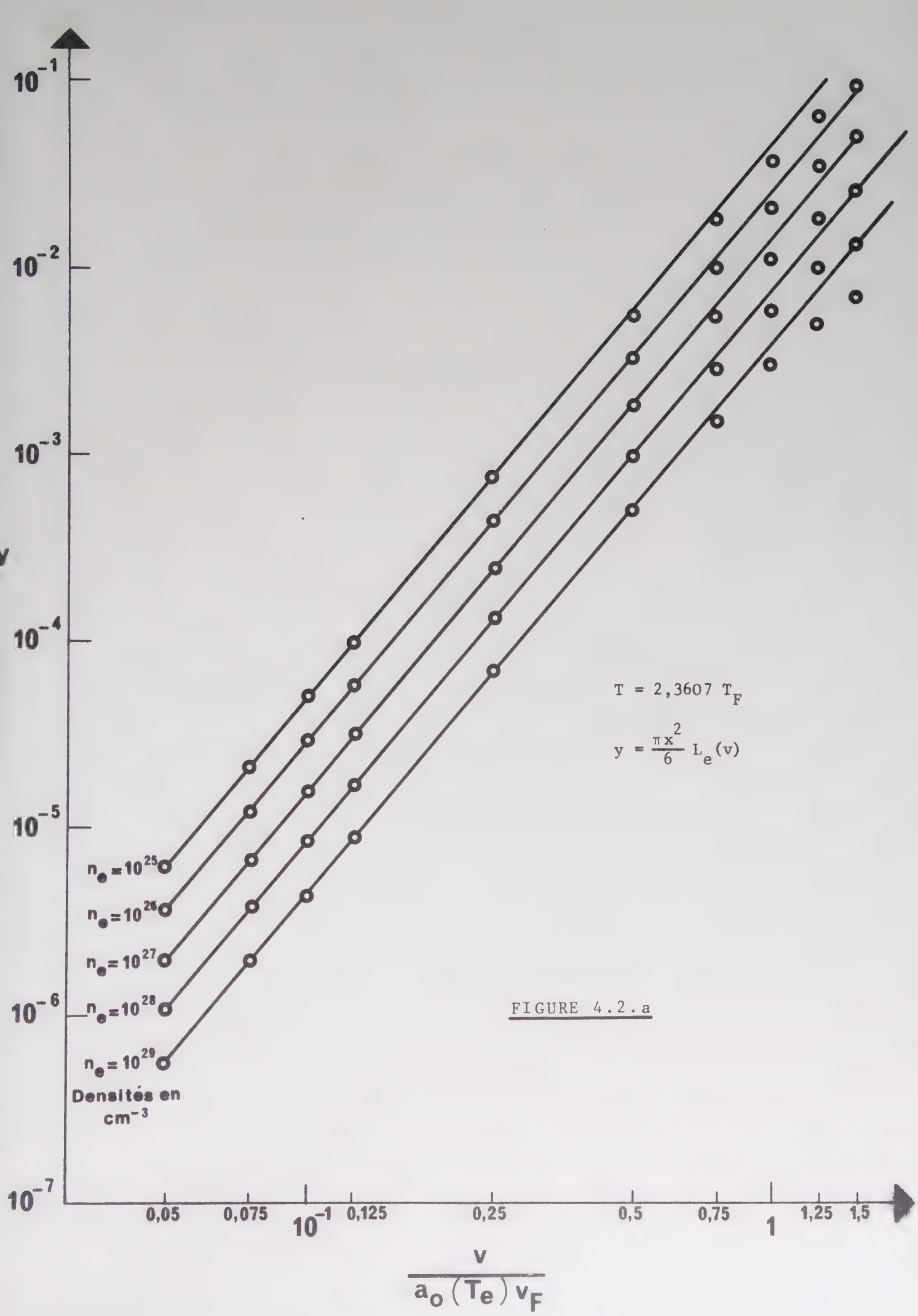

10^{-1}
10^{-2}
10^{-3}
10^{-4}
10^{-5}
10^{-6}
10^{-7}
$n_e = 10^{25}$
$n_e = 10^{26}$
$n_e = 10^{27}$
$n_e = 10^{28}$
$n_e = 10^{29}$
Densités en cm^{-3}
$T = 2,3607\ T_F$
$y = \frac{\pi x^2}{6} L_e(v)$
0,05
0,075
10^{-1}
0,125
0,25
0,5
0,75
1
1,25
1,5
$\frac{v}{a_o(T_e)v_F}$

FIGURE 4.2.a

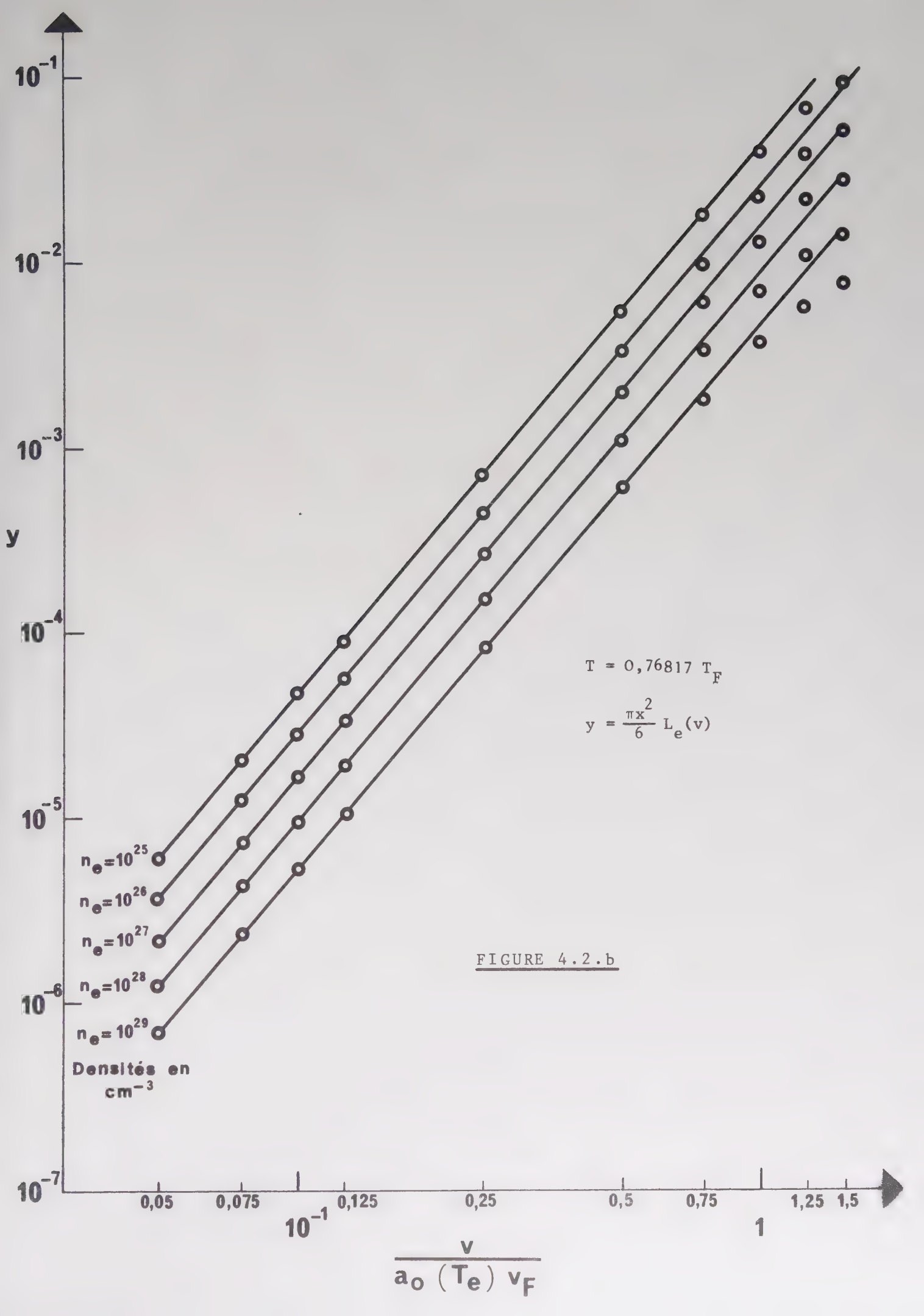

10^{-1}
10^{-2}
10^{-3}
10^{-4}
10^{-5}
10^{-6}
10^{-7}
y
$T = 0,76817\ T_F$
$y = \frac{\pi x^2}{6} L_e(v)$
$n_e = 10^{25}$
$n_e = 10^{26}$
$n_e = 10^{27}$
$n_e = 10^{28}$
$n_e = 10^{29}$
Densités en cm^{-3}
0,05
0,075
10^{-1}
0,125
0,25
0,5
0,75
1
1,25
1,5
$\frac{v}{a_o (T_e)\ v_F}$

FIGURE 4.2.b

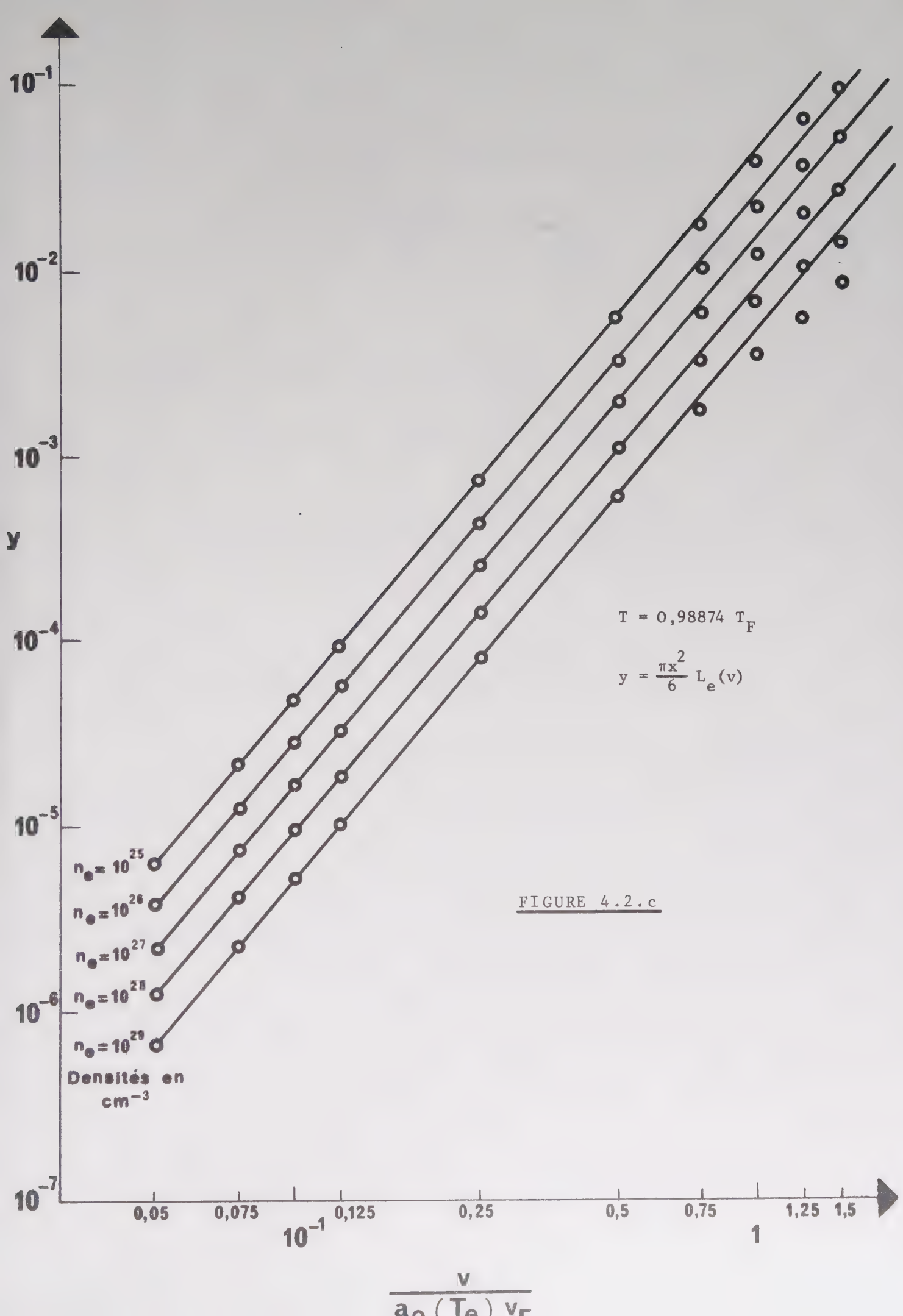

10^{-1}
10^{-2}
10^{-3}
10^{-4}
10^{-5}
10^{-6}
10^{-7}
y
$T = 0{,}98874\ T_F$
$y = \frac{\pi x^2}{6} L_e(v)$
$n_e = 10^{25}$
$n_e = 10^{26}$
$n_e = 10^{27}$
$n_e = 10^{28}$
$n_e = 10^{29}$
Densités en cm^{-3}
0,05
0,075
10^{-1}
0,125
0,25
0,5
0,75
1,25
1,5
1
$\frac{v}{a_0(T_e)\, v_F}$

FIGURE 4.2.c

soit $$I = \frac{e^{\alpha^e}}{2} \times \left[- \text{Log } A - 1 - A \text{ Log } A \right]$$

et

$$\text{Log } \Lambda_{\text{A.P.A.}} = \frac{\sqrt{\pi}\ a_o(T_e)}{T_e^{3/2}} \left[- \text{Log } \frac{\lambda_D^{-2}}{4q_F^2 T_e} - 1 - \frac{\lambda_D^{-2}}{4q_F^2 T_e} \text{ Log } \frac{\lambda_D^{-2}}{4q_F^2 T_e} \right] \tag{4.8a}$$

b) Limite de $\text{Log } \Lambda_{\text{A.P.A.}}$ pour $T_e << 1$

$$I = \frac{1}{2} \left[\text{Log } \frac{1+B}{B} - \frac{1}{B(1+B)} \right] \qquad \left(B = \chi^2 f_1(0,0) \right)$$

Soit :

$$\text{Log } \Lambda_{\text{A.P.A.}} = \frac{\pi}{4} \times \left[\text{Log } \frac{4q_F^2 + \lambda_{TF}^{-2}}{\lambda_{TF}^{-2}} - \frac{4\lambda_{TF}^{-4}}{\lambda_{TF}^{-2}(4q_F^2 + \lambda_{TF}^{-2})} \right] \tag{4.8b}$$

IV.6. LIMITE DU POUVOIR D'ARRÊT LORSQUE $v >> v_{THe}$

Ce cas a été étudié par Lindhard à température nulle [10]. Nous nous plaçons donc dans la limite :

$$\frac{v}{v_F a_o(T_e)} >> 1 \tag{4.9}$$

Considérons deux vitesses v_1 et v_2 vérifiant l'inégalité (4.9). Nous avons :

$$\frac{\pi\chi^2}{6} \left[L_e(v_1) - L_e(v_2) \right] = \int_{\frac{v_2}{v_F}}^{\frac{v_1}{v_F}} \chi^2 u\,du \int_0^\infty \frac{z^3\,dz f_2(z,u)}{\left[z^2 + \chi^2 f_1(z,u) \right]^2 + \left[\chi^2 f_2(z,u) \right]^2} \tag{4.10}$$

avec dans (4.10) $u >> a_o(T_e)$.

Nous avons vu qu'alors contribuent à l'intégrale deux phénomènes distincts :

* L'échange d'énergie avec le mode plasma autour de $z = z_r$

* L'échange d'énergie par choc binaire autour de $z = u$.

Lorsque la température est nulle, Lindhard a montré, par une méthode topologique, que ces deux contributions sont égales dès que $f_2(z_2,u)$ s'annule, le zéro du dénominateur ayant bien lieu avec u réel. A température non nulle, $f_2(z,u)$ s'approche exponentiellement de zéro pour $u >> a_o(T_e)$, et donc le pôle de l'intégrant est très proche de l'axe réel. Nous pouvons donc concevoir que ces deux contributions sont toujours égales. A la précision du calcul, nos résultats montrent, en effet, que les chocs proches contribuent autant que les chocs lointains au pouvoir d'arrêt.

Nous allons vérifier que, en négligeant les termes $\frac{\chi^2}{u^4}$ et $\frac{1}{u^6}$ (et au delà), ces deux contributions sont bien égales.

IV.6.a. RESONANCE

L'intégration sur les z a déjà été faite plus haut, cela donne :

$$L_{eR}(v_1) - L_{eR}(v_2) = \frac{3}{\chi^2} \int_{\frac{v_2}{v_F}}^{\frac{v_1}{v_F}} \frac{z_r^2(u)\,u\,du}{1 + \frac{\chi^2}{2 z_r(u)} \left(\frac{\partial f_1(z,u)}{\partial z} \right)_{z=z_r(u)}}$$

z_r étant donné par (3.14) :

$$z_r^2(u) = \frac{\chi^2}{3u^2} \left(1 + \frac{T_e F_{3/2}(\alpha^e)}{u^2 F_{1/2}(\alpha^e)} + \frac{T_e^2 F_{5/2}(\alpha^e)}{u^4 F_{1/2}(\alpha^e)} \right)$$

Ceci nous permet, tout d'abord, de simplifier le dénominateur :

$$\frac{\chi^2}{2z_2}\left(\frac{\partial f_1(z,u)}{\partial z}\right)_{z=z_r(u)} \simeq -\frac{\chi^2}{3u^4}$$ qui est négligé devant 1.

Ainsi :

$$L_{eR}(v_1) - L_{eR}(v_2) = \frac{3}{\chi^2}\int_{\frac{v_2}{v_F}}^{\frac{v_1}{v_F}} z_r^2(u)\,u\,du = \frac{1}{2}\left\{\text{Log } u^2 - \frac{T_e}{u^2}\frac{F_{3/2}(\alpha^e)}{F_{1/2}(\alpha^e)} - \frac{T_e^2}{2u^4}\frac{F_{5/2}(\alpha^e)}{F_{1/2}(\alpha^e)}\right\}_{\frac{v_2}{v_F}}^{\frac{v_1}{v_F}}$$

Soit :

$$L_{eR}(v) = \text{Constante} + \frac{1}{2}\left[\text{Log}\left(\frac{v}{v_F}\right)^2 - \frac{T_e}{\left(\frac{v}{v_F}\right)^2}\frac{F_{3/2}(\alpha^e)}{F_{1/2}(\alpha^e)} - \frac{T_e^2 F_{5/2}(\alpha^e)}{2\left(\frac{v}{v_F}\right)^4 F_{1/2}(\alpha^e)}\right]$$

IV.6.b. CHOCS PROCHES

Comme nous l'avons déjà vu $f_2(z,u)$ n'est non nulle que pour $z \simeq u$, nous obtenons ainsi :

$$f_2(z,u) = \frac{\pi T_e}{8z}\,\text{Log}\left(1 + e^{\frac{\gamma - p_-^2}{T_e}}\right)$$

qui a pour valeur maximale :

$$f_{2\ \max} \simeq \frac{\pi T_e}{8u}\,\text{Log}\left(1 + e^{\frac{\gamma}{T_e}}\right)$$

et

$$f_1(z,u) \simeq \frac{T_e}{8u^2}\left(\text{P.P.}\int_{-\infty}^{+\infty} h(x+p_+)\,dx\right)$$

$f_1(z,u)$ décroît comme $\frac{1}{u^2}$, $\chi^2 f_1(z,u)$ est donc négligeable par rapport à z^2 dans le rapport $\frac{\chi^2}{u^4}$ et de même $[\chi^2 f_2(z,u)]^2$ est négligeable devant z^4.

Ces approximations nous permettent d'écrire :

$$L_e p(v_1) - L_e p(v_2) = \frac{6}{\pi} \int_{\frac{v_2}{v_F}}^{\frac{v_1}{v_F}} u\,du \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z^3\,dz}{(z^2+\varepsilon)^2} \frac{\pi T_e}{8z} \operatorname{Log}\left(1 + e^{\frac{\gamma - p_-^2}{T_e}}\right)$$

ε étant << 1.

Ceci nous conduit par intégrations par partie successives à :

$$L_e p(v_1) - L_e p(v_2) = \frac{3}{2} T_e^{3/2} F_{1/2}(\alpha) \int_{\frac{v_2}{v_F}}^{\frac{v_1}{v_F}} u^{-1} du \left[1 + \frac{T_e}{u^2} \frac{F_{3/2}(\alpha^e)}{F_{1/2}(\alpha)} + \frac{T_e^2 F_{5/2}(\alpha^e)}{u^4 F_{1/2}(\alpha^e)}\right]$$

qui est le même développement que celui de $L_R(v)$. Nous avons donc $L_e(v) = L_R(v) + L_p(v)$:

$$L_e(v) = \text{Constante} + \operatorname{Log}\left(\frac{v}{v_F}\right)^2 - \frac{T_e}{\left(\frac{v}{v_F}\right)^2} \frac{F_{3/2}(\alpha^e)}{F_{1/2}(\alpha^e)} - \frac{T_e^2}{2\left(\frac{v}{v_F}\right)^4} \frac{F_{5/2}(\alpha^e)}{F_{1/2}(\alpha^e)}$$

La constante est calculée dans l'appendice A :

$$L(v) = \operatorname{Log} \frac{2mv^2}{\hbar\omega_p} - \frac{T_e}{\left(\frac{v}{v_F}\right)^2} \frac{F_{3/2}(\alpha^e)}{F_{1/2}(\alpha^e)} - \frac{T_e^2}{2\left(\frac{v}{v_F}\right)^4} \frac{F_{5/2}(\alpha^e)}{F_{1/2}(\alpha^e)} \qquad (4.11)$$

Ce développement est *un résultat nouveau* valable à toutes températures qui étend celui de Lindhard [10] valable à température nulle.

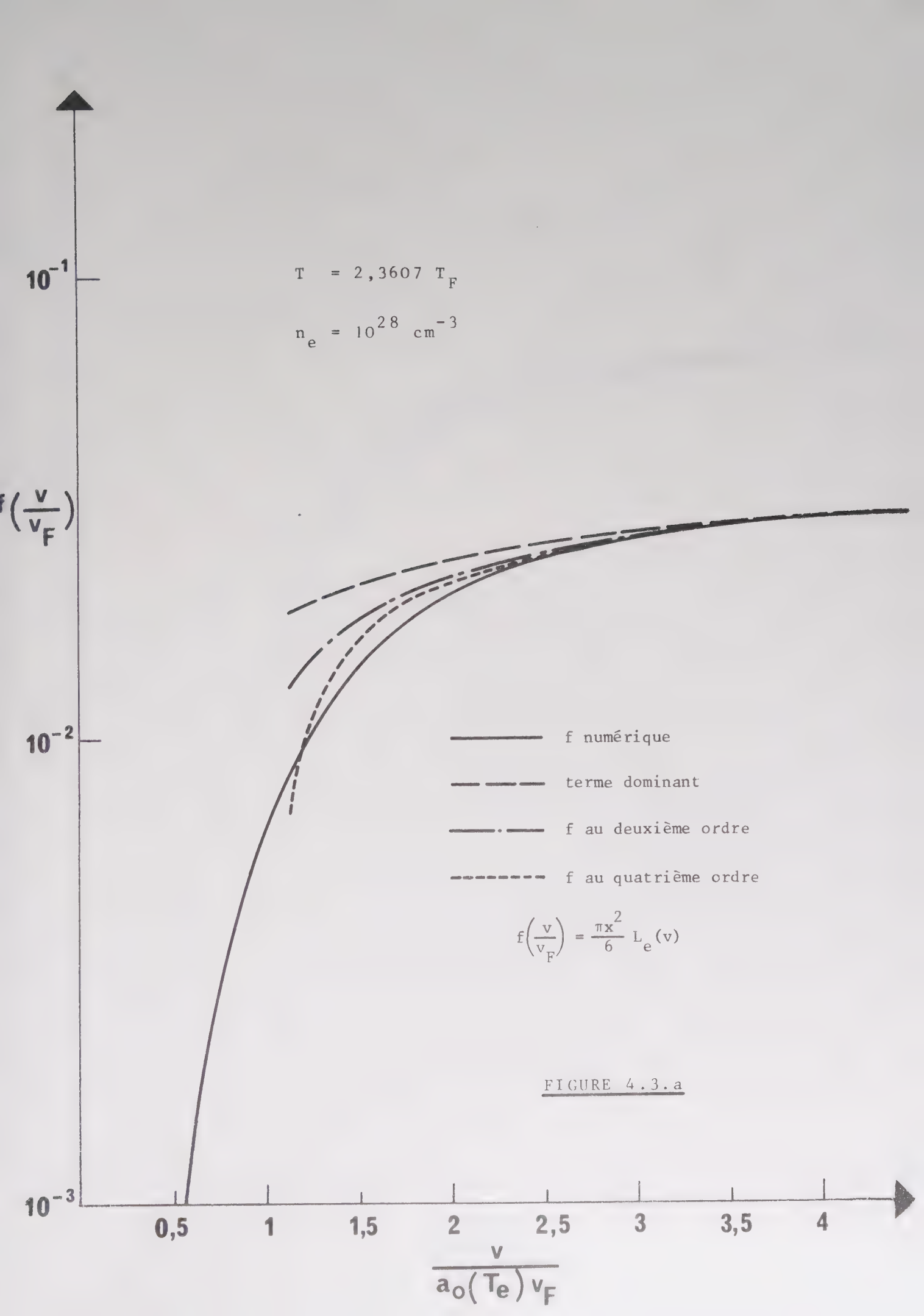

10^{-1}
10^{-2}
10^{-3}
$f\left(\frac{v}{v_F}\right)$
$T = 2,3607\ T_F$
$n_e = 10^{28}\ cm^{-3}$
f numérique
terme dominant
f au deuxième ordre
f au quatrième ordre
$f\left(\frac{v}{v_F}\right) = \frac{\pi x^2}{6} L_e(v)$
0,5
1
1,5
2
2,5
3
3,5
4
$\frac{v}{a_o(T_e)\, v_F}$

FIGURE 4.3.a

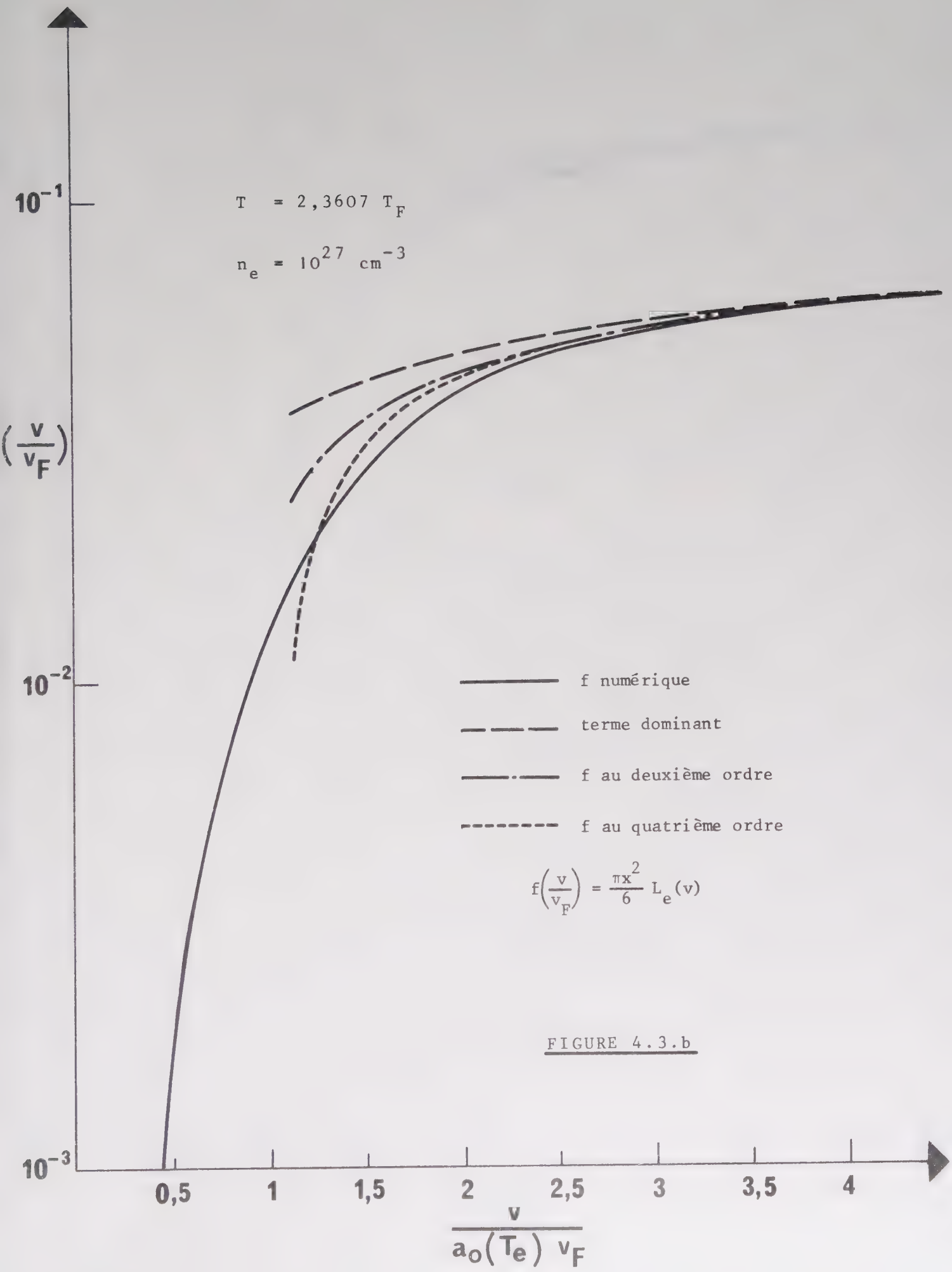

10^{-1}
10^{-2}
10^{-3}
$\left(\frac{v}{v_F}\right)$
$T = 2,3607\ T_F$
$n_e = 10^{27}\ cm^{-3}$
f numérique
terme dominant
f au deuxième ordre
f au quatrième ordre
$f\left(\frac{v}{v_F}\right) = \frac{\pi x^2}{6} L_e(v)$
0,5
1
1,5
2
2,5
3
3,5
4
$\frac{v}{a_o(T_e)\ v_F}$

FIGURE 4.3.b

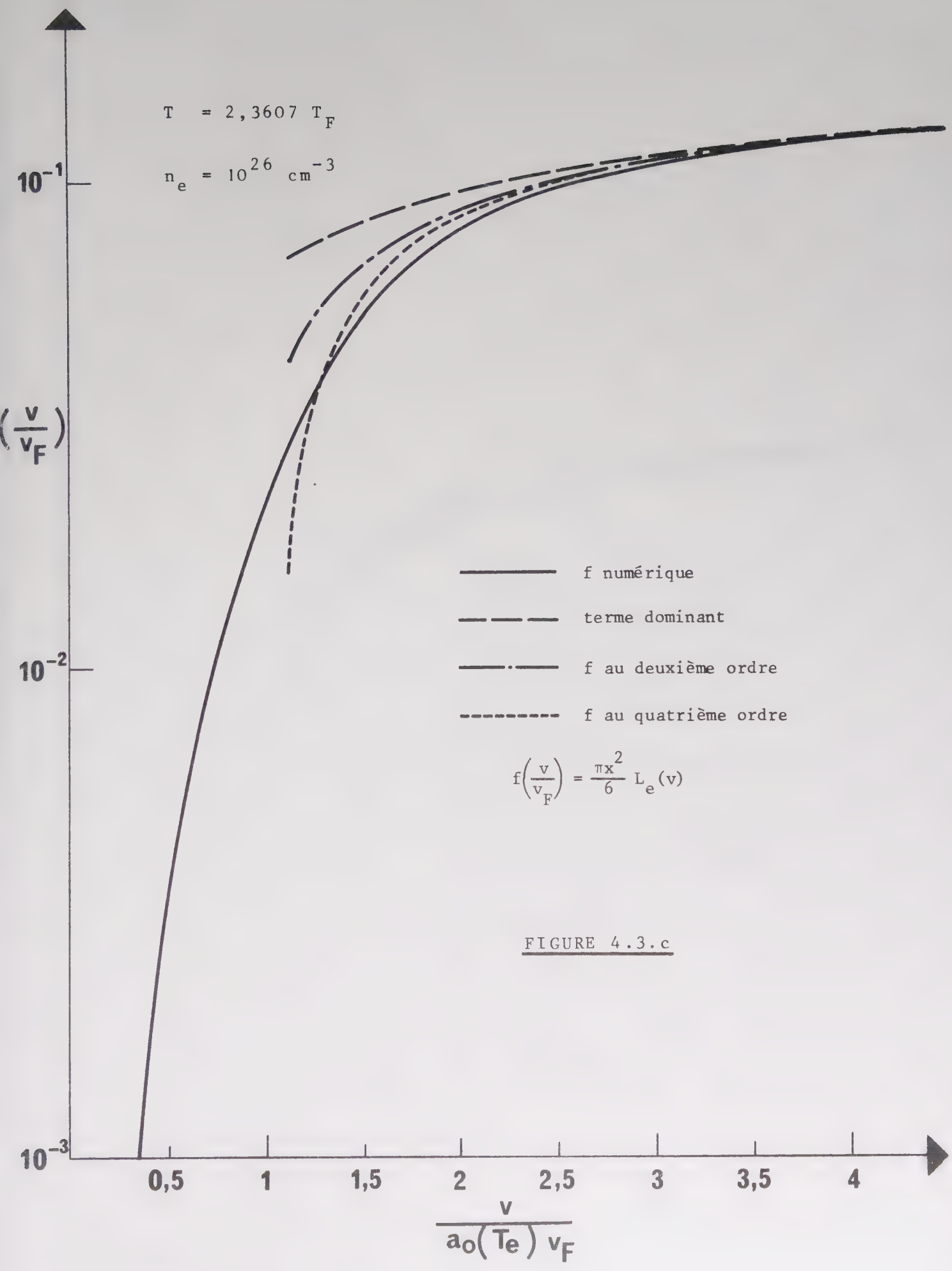

T = 2,3607 T_F
$n_e = 10^{26}\ cm^{-3}$
10^{-1}
10^{-2}
10^{-3}
$\left(\frac{v}{v_F}\right)$
f numérique
terme dominant
f au deuxième ordre
f au quatrième ordre
$f\left(\frac{v}{v_F}\right) = \frac{\pi x^2}{6} L_e(v)$
0,5
1
1,5
2
2,5
3
3,5
4
$\frac{v}{a_o(T_e)\, v_F}$

FIGURE 4.3.c

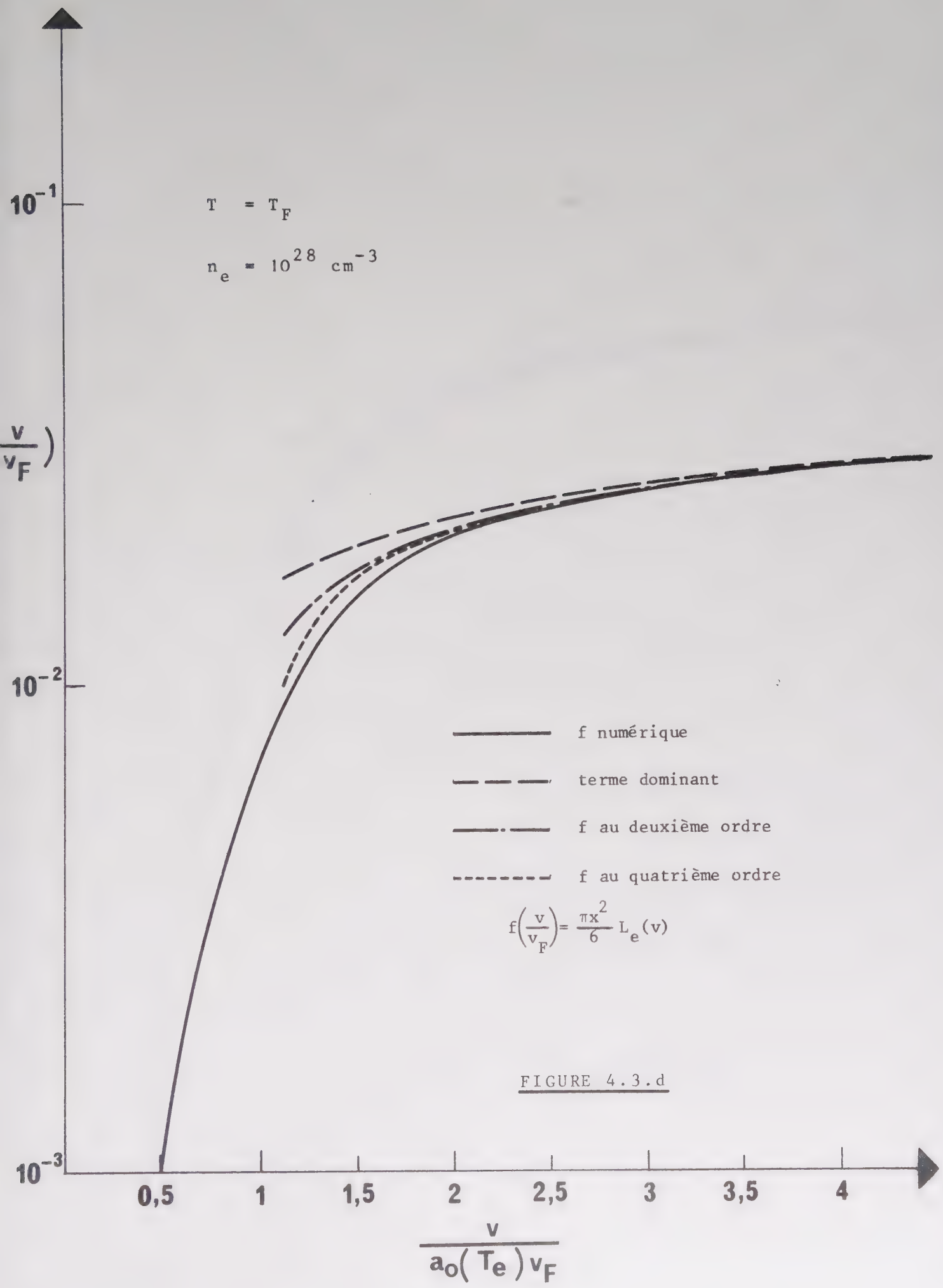

10^{-1}
$T = T_F$
$n_e = 10^{28}\ cm^{-3}$
$\frac{v}{v_F}$)
10^{-2}
f numérique
terme dominant
f au deuxième ordre
f au quatrième ordre
$f\left(\frac{v}{v_F}\right) = \frac{\pi x^2}{6} L_e(v)$
10^{-3}
0,5
1
1,5
2
2,5
3
3,5
4
$\frac{v}{a_o(T_e)v_F}$

FIGURE 4.3.d

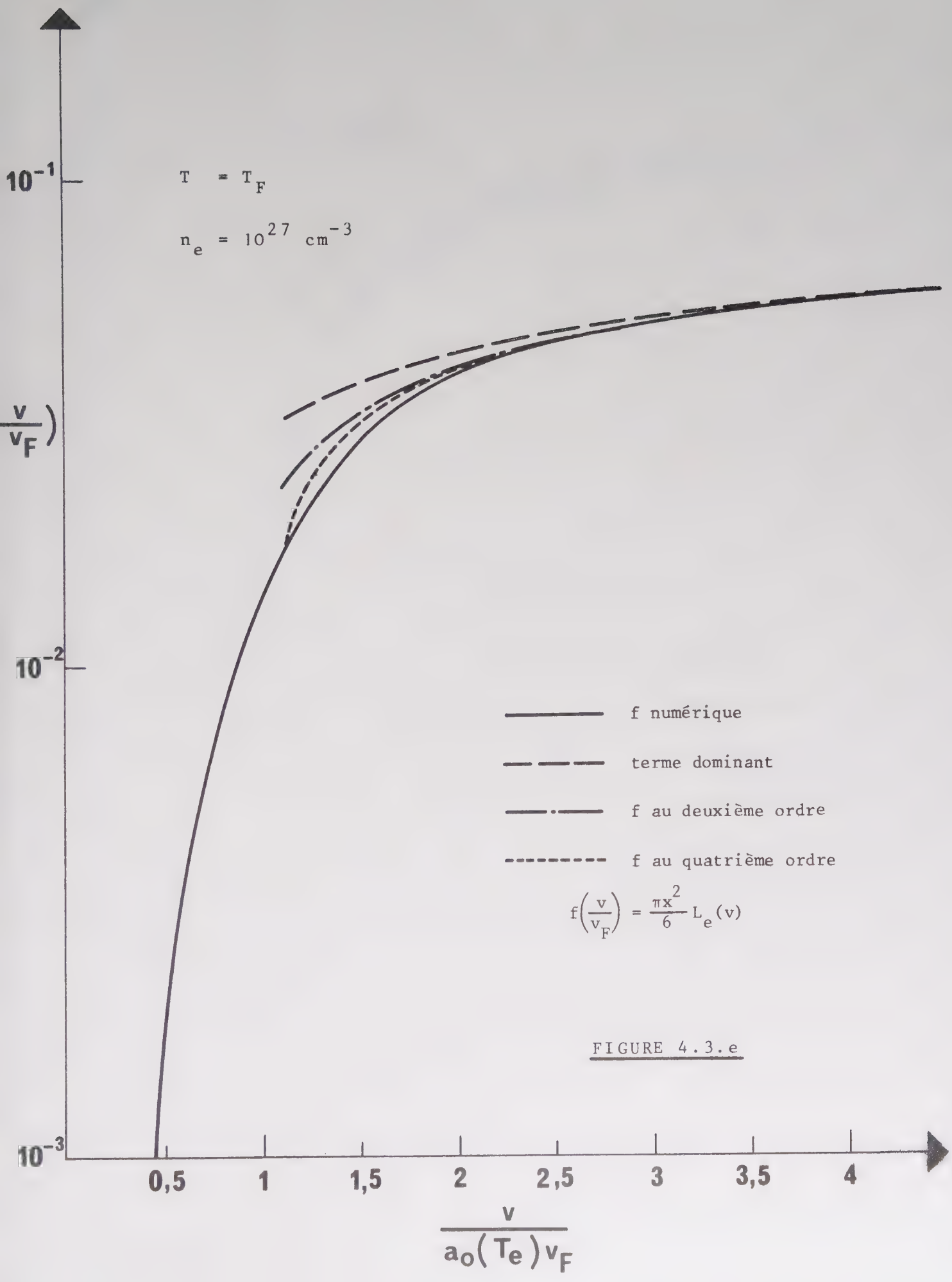

10^{-1}
$T = T_F$
$n_e = 10^{27}\ cm^{-3}$
$\frac{v}{v_F}$)
10^{-2}
f numérique
terme dominant
f au deuxième ordre
f au quatrième ordre
$f\left(\frac{v}{v_F}\right) = \frac{\pi x^2}{6} L_e(v)$
10^{-3}
0,5
1
1,5
2
2,5
3
3,5
4
$\frac{v}{a_o(T_e)v_F}$

FIGURE 4.3.e

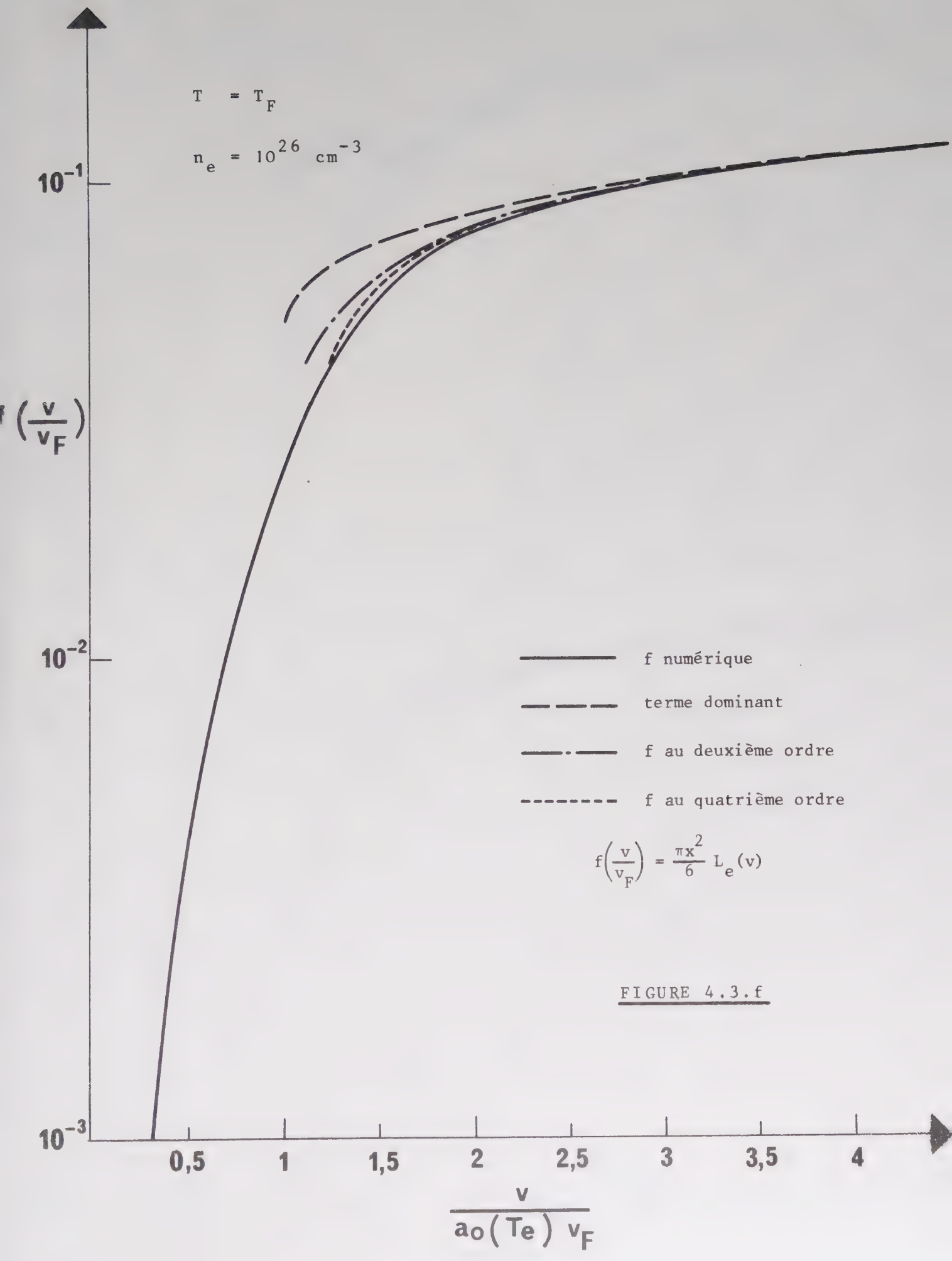

T = T_F
n_e = 10^26 cm^-3
10^-1
10^-2
10^-3
f (v/v_F)
f numérique
terme dominant
f au deuxième ordre
f au quatrième ordre
f(v/v_F) = (πx^2/6) L_e(v)
0,5
1
1,5
2
2,5
3
3,5
4
v / a_o(Te) v_F

FIGURE 4.3.f

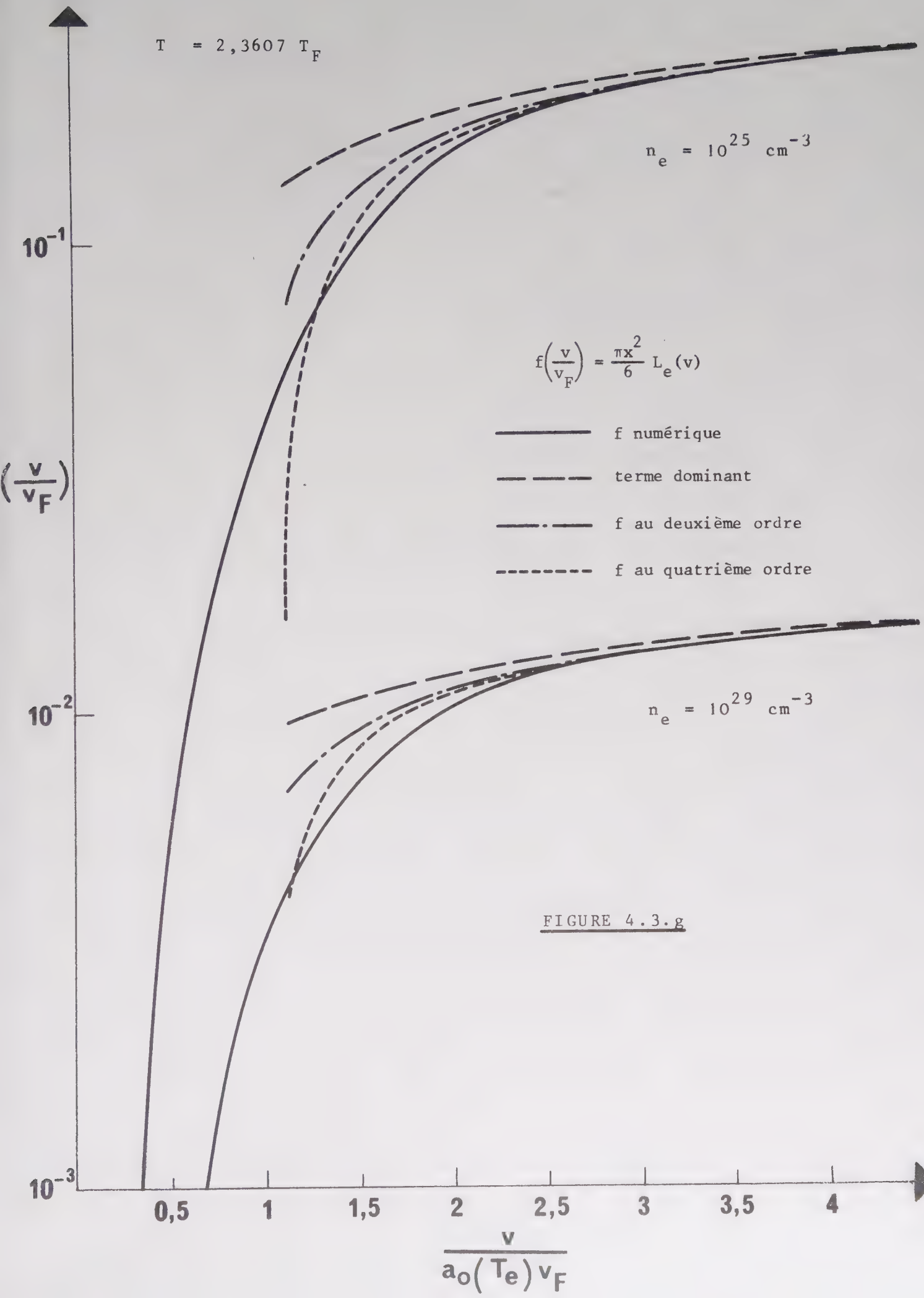

T = 2,3607 T_F
$n_e = 10^{25}$ cm^{-3}
$f\left(\frac{v}{v_F}\right) = \frac{\pi x^2}{6} L_e(v)$
f numérique
terme dominant
f au deuxième ordre
f au quatrième ordre
$n_e = 10^{29}$ cm^{-3}
10^{-1}
10^{-2}
10^{-3}
$\left(\frac{v}{v_F}\right)$
0,5
1
1,5
2
2,5
3
3,5
4
$\frac{v}{a_o(T_e)\, v_F}$

FIGURE 4.3.g

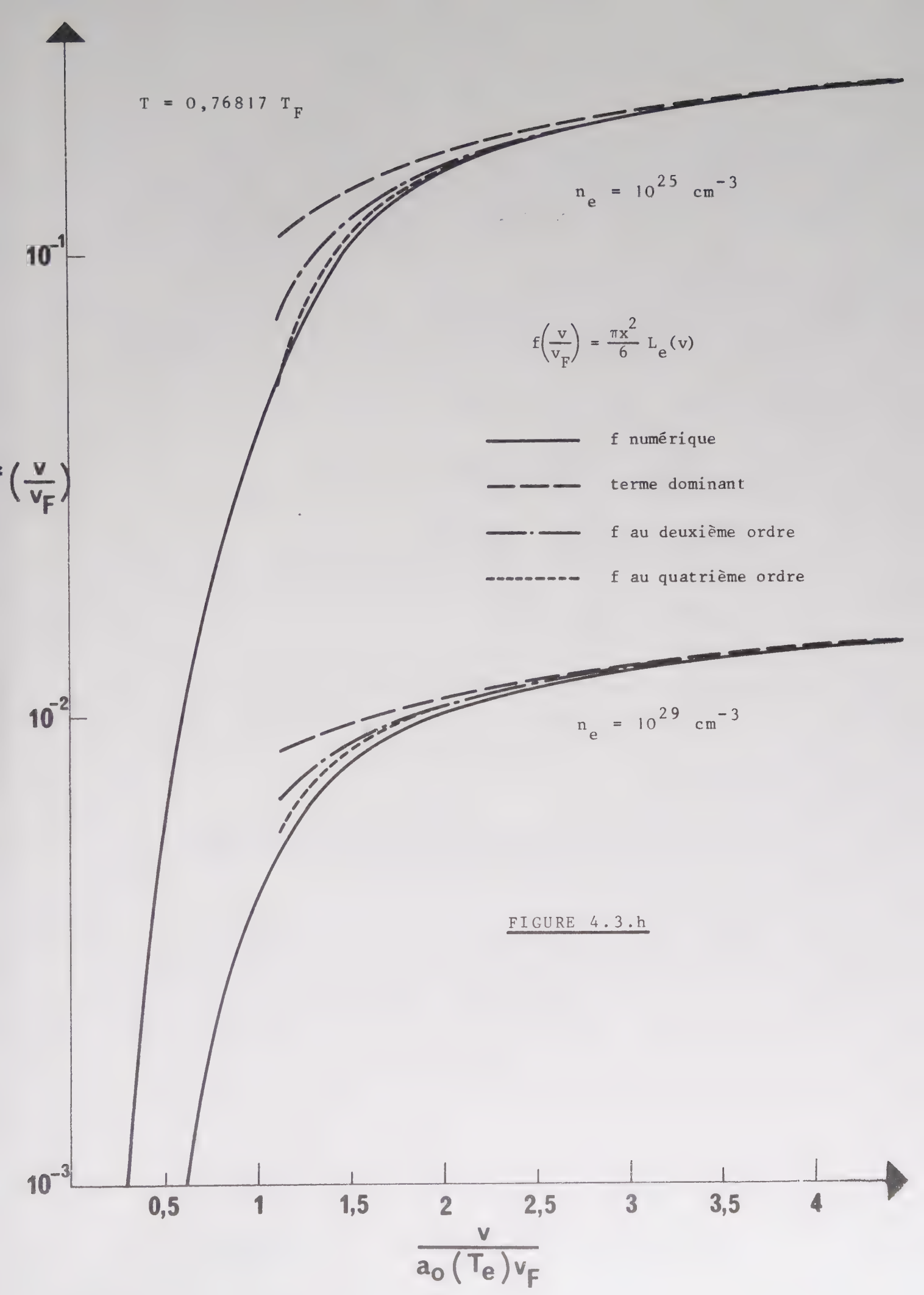

T = 0,76817 T_F
$n_e = 10^{25}$ cm^{-3}
$f\left(\frac{v}{v_F}\right) = \frac{\pi x^2}{6} L_e(v)$
f numérique
terme dominant
f au deuxième ordre
f au quatrième ordre
$n_e = 10^{29}$ cm^{-3}
10^{-1}
10^{-2}
10^{-3}
$\left(\frac{v}{v_F}\right)$
0,5
1
1,5
2
2,5
3
3,5
4
$\frac{v}{a_o(T_e)v_F}$

FIGURE 4.3.h

Sur les figures (4.3) on peut voir l'amélioration apportée par les deux derniers termes du développement par rapport au premier terme appelé dominant. Le tableau (4) donne la précision de cette approximation à grande vitesse.

Nous retrouvons le fait qu'à grande vitesse la statistique des électrons ne joue plus aucun rôle. La température et la dégénérescence disparaissant du pouvoir d'arrêt lorsque $v >> v_{THe}$.

Les limites haute et basse températures peuvent s'écrire :

- $T_e << 1$ $\qquad L_e(v) = \text{Log}\,\frac{2mv^2}{\hbar\omega_p} - \frac{3}{5}\left(\frac{v_F^2}{v^2}\right) - \frac{3}{14}\left(\frac{v_F^4}{v^4}\right)$ (Lindhard)

- $T_e >> 1$ $\qquad L_e(v) = \text{Log}\,\frac{2mv^2}{\hbar\omega_p} - \frac{3}{2}\left(\frac{v_{eTH}^2}{v^2}\right) - \frac{15}{8}\left(\frac{v_{eTH}^4}{v^4}\right)$

$$\left(v_{eTH}^2 = \frac{2k_B T}{m_e}\right)$$

Lorsque la densité devient plus faible, seuls les deux premiers termes du développement restent valables.

IV.7. VARIATION DU POUVOIR D'ARRÊT AVEC T_e ET N_e

Remarquons tout d'abord le gros avantage d'avoir tout paramétré par rapport à $a_o(T_e)v_F$ et non pas comme c'est le cas dans les travaux antérieurs par v_F seulement. Cela permet de bien délimiter les différents régimes en vitesse :

- $\frac{v}{a_o(T_e)v_F} \leq 0{,}8$: limite basse vitesse valable

- $0{,}8 \leq \frac{v}{a_o(T_e)v_F} \leq 1{,}5$: vitesse intermédiaire, le maximum du pouvoir d'arrêt a lieu pour $\frac{v}{a_o(T_e)v_F} \simeq 1$

- $1{,}5 \leq \frac{v}{a_o(T_e)v_F}$: limite grande vitesse valable.

n_e / $\frac{v}{a_o v_F}$	10^{25} cm^{-3}		10^{26} cm^{-3}		10^{27} cm^{-3}		10^{28} cm^{-3}		10^{29} cm^{-3}	
	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B
2	.1510	.1536	.7846 10^{-1}	.7972	.4030 10^{-1}	.4091 10^{-1}	.2051 10^{-1}	.2080 10^{-1}	.1036 10^{-1}	.1050 10^{-1}
3	.2011	.2012	.1018	.1018	.5113 10^{-1}	.5117 10^{-1}	.2555 10^{-1}	.2556 10^{-1}	.1270 10^{-1}	.1271 10^{-1}
4	.2313	.2313	.1157	.1158	.5763 10^{-1}	.5764 10^{-1}	.2856 10^{-1}	.2857 10^{-1}	.1410 10^{-1}	.1410 10^{-1}
5	.2536	.2536	.1261	.1261	.6245 10^{-1}	.6245 10^{-1}	.308 10^{-1}	.308 10^{-1}	.1514 10^{-1}	.1514 10^{-1}

$$\underline{T = T_F}$$

n_e / $\frac{v}{a_o v_F}$	10^{25} cm^{-3}		10^{26} cm^{-3}		10^{27} cm^{-3}		10^{28} cm^{-3}		10^{29} cm^{-3}	
	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B
2	.1517	.1640	.8026 10^{-1}	.8452 10^{-1}	.4096 10^{-1}	.4314 10^{-1}	.2075 10^{-1}	.2184 10^{-1}	.1042 10^{-1}	.1098 10^{-1}
3	.2167	.2174	.1093	.1093	.5450 10^{-1}	.5464 10^{-1}	.2712 10^{-1}	.2718 10^{-1}	.1343 10^{-1}	.1346 10^{-1}
4	.2489	.2490	.1239	.1240	.6143 10^{-1}	.6145 10^{-1}	.3033 10^{-1}	.3034 10^{-1}	.1492 10^{-1}	.1492 10^{-1}
5	.2719	.2719	.1346	.1346	.664 10^{-1}	.664 10^{-1}	.3446 10^{-1}	.3446 10^{-1}	.1599 10^{-1}	.1599 10^{-1}

$$\underline{T = 2{,}3607\ T_F}$$

TABLEAU 4

Précision du développement 4.11

$$A = \frac{\pi X^2}{6} \times L_e(v),\ L_e(v)_{\text{numérique}}$$

$$B = \frac{\pi X^2}{6} \left[\text{Log} \frac{2mv^2}{\hbar\omega_p} - T_e \frac{F_{3/2}(\alpha^e)}{F_{1/2}(\alpha^e)} \frac{v_F^2}{v^2} - \frac{T_e^2}{2} \frac{F_{5/2}(\alpha^e)}{F_{1/2}(\alpha^e)} \frac{v_F^4}{v^4} \right]$$

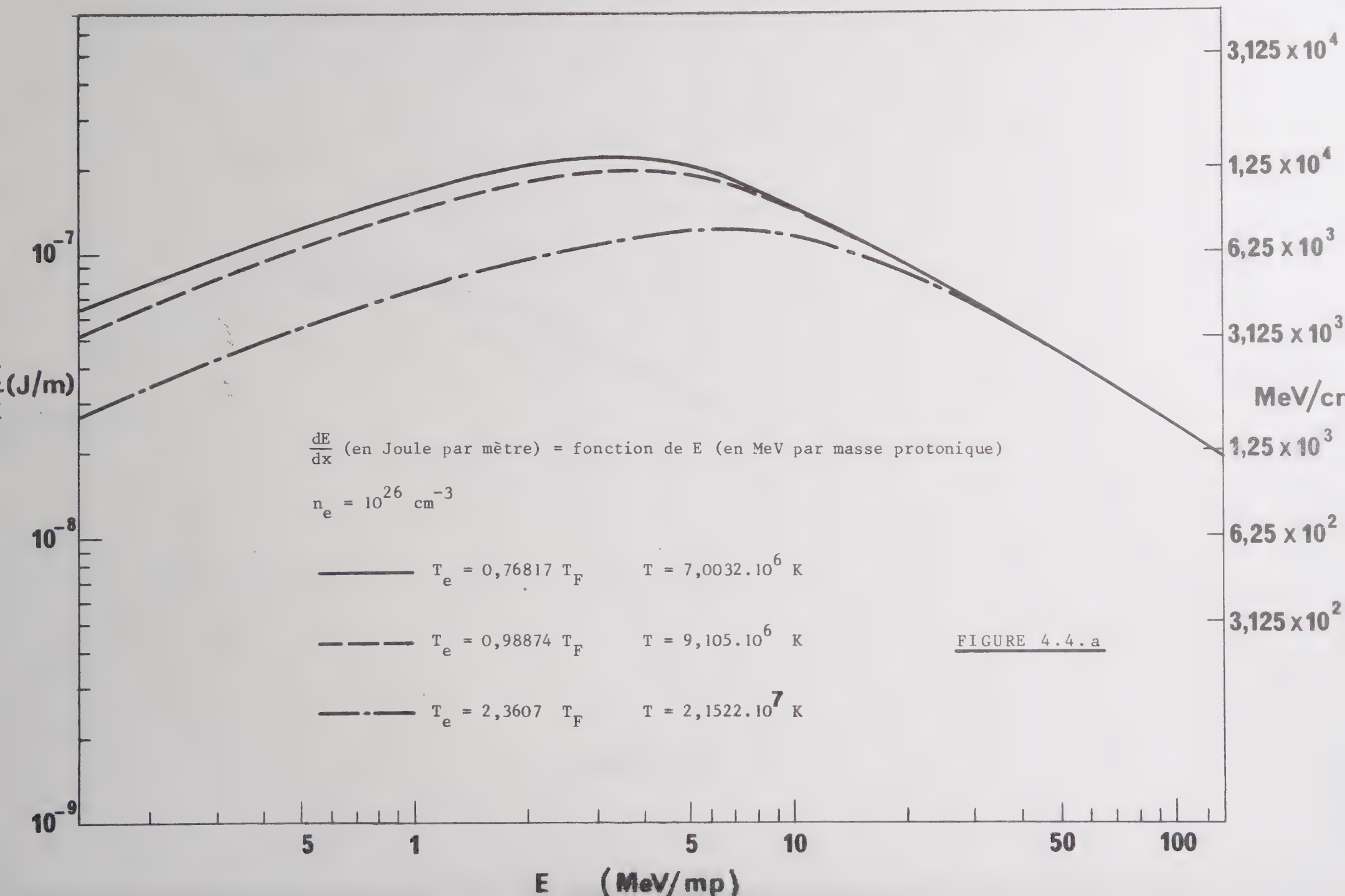

10^{-7}
10^{-8}
10^{-9}
(J/m)
$3{,}125 \times 10^{4}$
$1{,}25 \times 10^{4}$
$6{,}25 \times 10^{3}$
$3{,}125 \times 10^{3}$
MeV/cr
$1{,}25 \times 10^{3}$
$6{,}25 \times 10^{2}$
$3{,}125 \times 10^{2}$
5
1
5
10
50
100
E (MeV/mp)
$\frac{dE}{dx}$ (en Joule par mètre) = fonction de E (en MeV par masse protonique)
$n_e = 10^{26}$ cm^{-3}
$T_e = 0{,}76817\ T_F$ $T = 7{,}0032.10^{6}$ K
$T_e = 0{,}98874\ T_F$ $T = 9{,}105.10^{6}$ K
$T_e = 2{,}3607\ T_F$ $T = 2{,}1522.10^{7}$ K

FIGURE 4.4.a

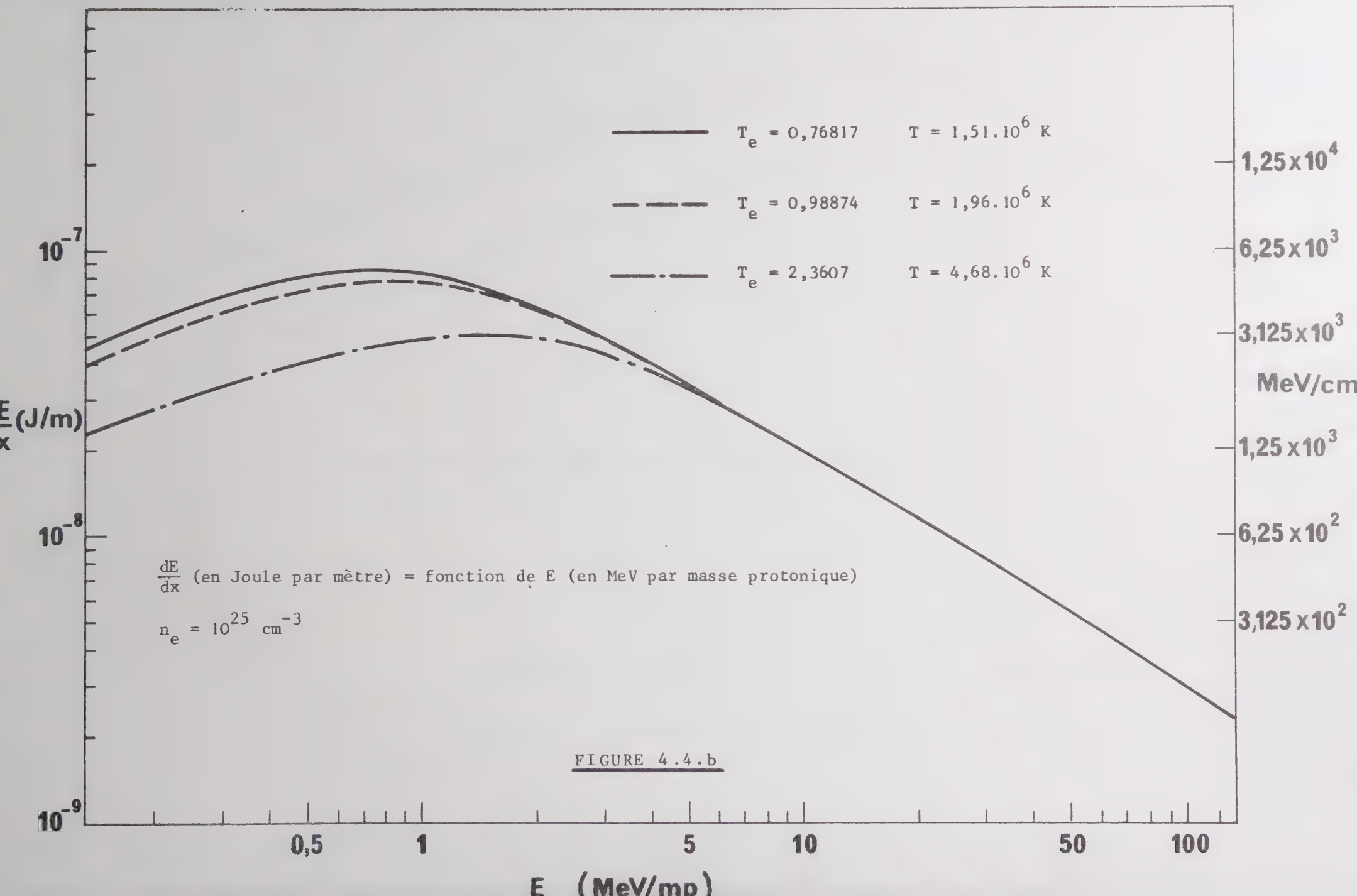

T_e = 0,76817 T = 1,51.10^6 K
T_e = 0,98874 T = 1,96.10^6 K
T_e = 2,3607 T = 4,68.10^6 K
10^{-7}
10^{-8}
10^{-9}
$\frac{dE}{dx}$(J/m)
1,25x10^4
6,25x10^3
3,125x10^3
MeV/cm
1,25x10^3
6,25x10^2
3,125x10^2
$\frac{dE}{dx}$ (en Joule par mètre) = fonction de E (en MeV par masse protonique)
n_e = 10^{25} cm^{-3}
0,5
1
5
10
50
100
E (MeV/mp)

FIGURE 4.4.b

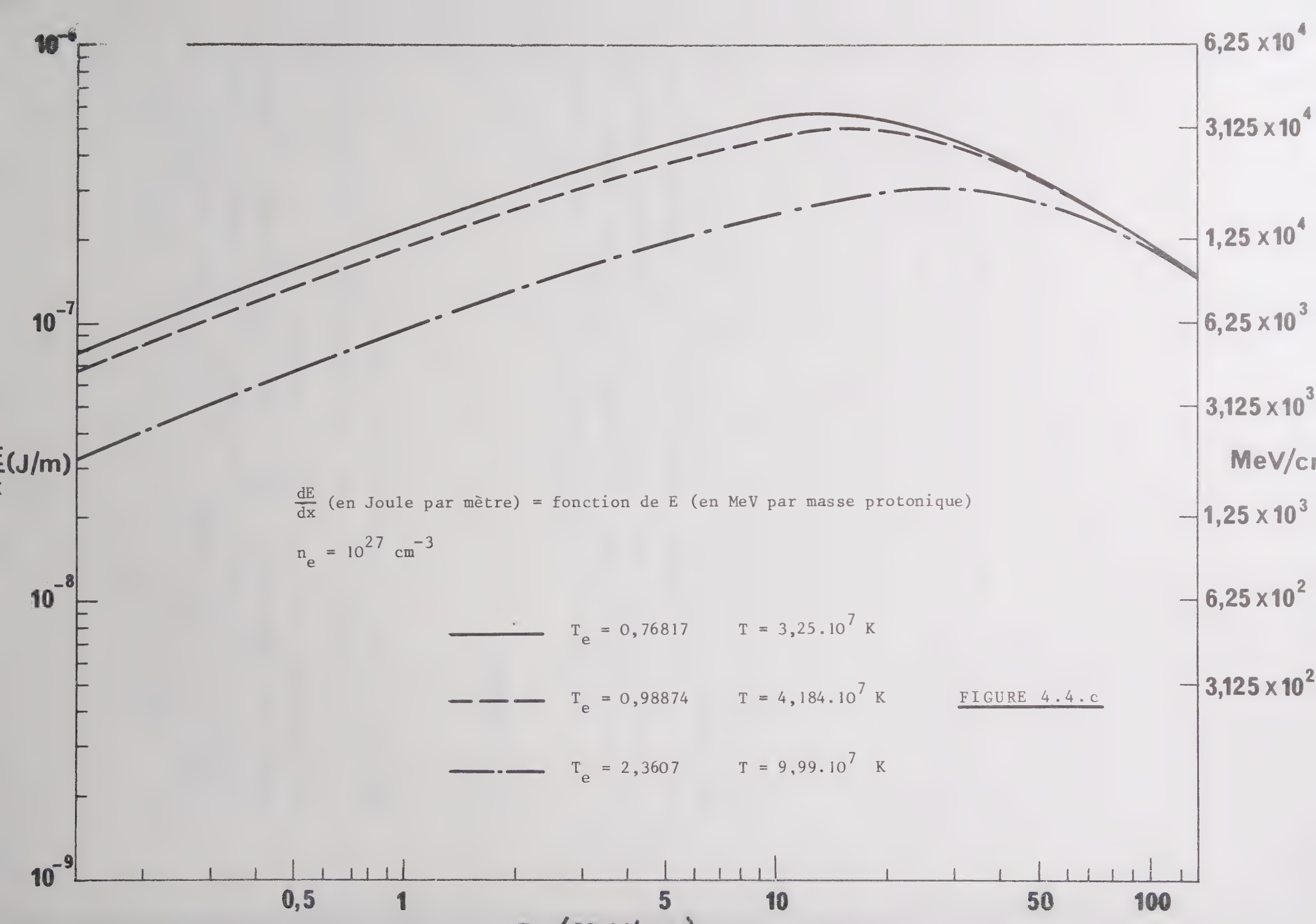

10^{-6}
10^{-7}
10^{-8}
10^{-9}
E(J/m)
6,25 x 10^4
3,125 x 10^4
1,25 x 10^4
6,25 x 10^3
3,125 x 10^3
MeV/c
1,25 x 10^3
6,25 x 10^2
3,125 x 10^2
0,5
1
5
10
50
100
$\frac{dE}{dx}$ (en Joule par mètre) = fonction de E (en MeV par masse protonique)
$n_e = 10^{27}$ cm^{-3}
T_e = 0,76817 T = 3,25.10^7 K
T_e = 0,98874 T = 4,184.10^7 K
T_e = 2,3607 T = 9,99.10^7 K

FIGURE 4.4.c

Lorsqu'on fixe la densité (figure 4.4), le pouvoir d'arrêt diminue avec l'augmentation de la température. La dépendance en température est plus sensible à faible qu'à grande vitesse. Ce qui n'est plus le cas dans un plasma incomplètement ionisé où la dépendance en température de $\frac{dE}{dx}$ est fonction surtout de la variation de l'ionisation moyenne lorsque T augmente.

Sur la figure (4.5) nous avons reporté les variations de $\frac{dE}{dx}$ avec n_e lorsqu'on fixe la dégénérescence.

IV.8. PARCOURS

La grandeur la plus directement accessible est la distance que parcourt un ion avant de s'immobiliser. En fait, comme la fin du parcours sort du cadre de notre théorie (changement d'état de charge de l'ion incident, énergie de recul non négligeable) nous définissons, comme c'est l'usage, le parcours R comme étant la distance au bout de laquelle l'ion incident a perdu 90 pour cent de son énergie. Soit :

$$R = \int_0^x dx = \int_E^{\frac{E}{10}} \frac{dE}{\left(\frac{dE}{dx}\right)} \qquad (4.12)$$

$\frac{dE}{dx}$ n'étant fonction que de v et de Z, le parcours est proportionnel à la masse et inversement proportionnel au carré de la charge de l'ion incident pour une vitesse initiale donnée.

Nous avons reporté les résultats sur la figure (4.6). L'ordre de grandeur de R se situe entre le micron et le millimètre, dans les conditions considérées.

A faible vitesse initiale $\frac{dE}{dx}$ varie comme $\sqrt{E}$ donc R aussi et à grande vitesse, en négligeant la variation du Log, R varie comme E^2.

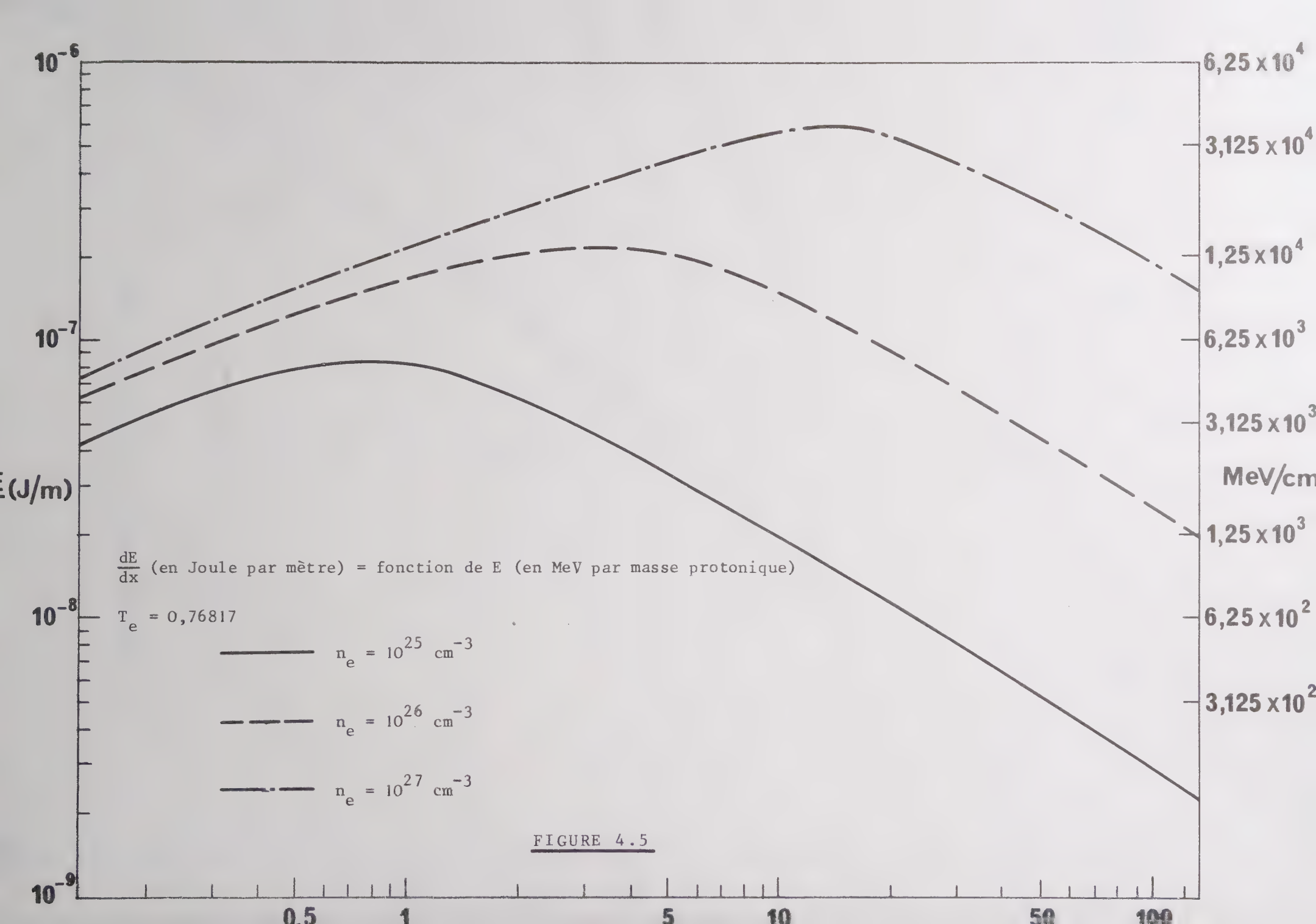

10^-6
10^-7
10^-8
10^-9
E (J/m)
6,25 x 10^4
3,125 x 10^4
1,25 x 10^4
6,25 x 10^3
3,125 x 10^3
MeV/cm
1,25 x 10^3
6,25 x 10^2
3,125 x 10^2
dE/dx (en Joule par mètre) = fonction de E (en MeV par masse protonique)
T_e = 0,76817
n_e = 10^25 cm^-3
n_e = 10^26 cm^-3
n_e = 10^27 cm^-3
0.5
1
5
10
50
100

FIGURE 4.5

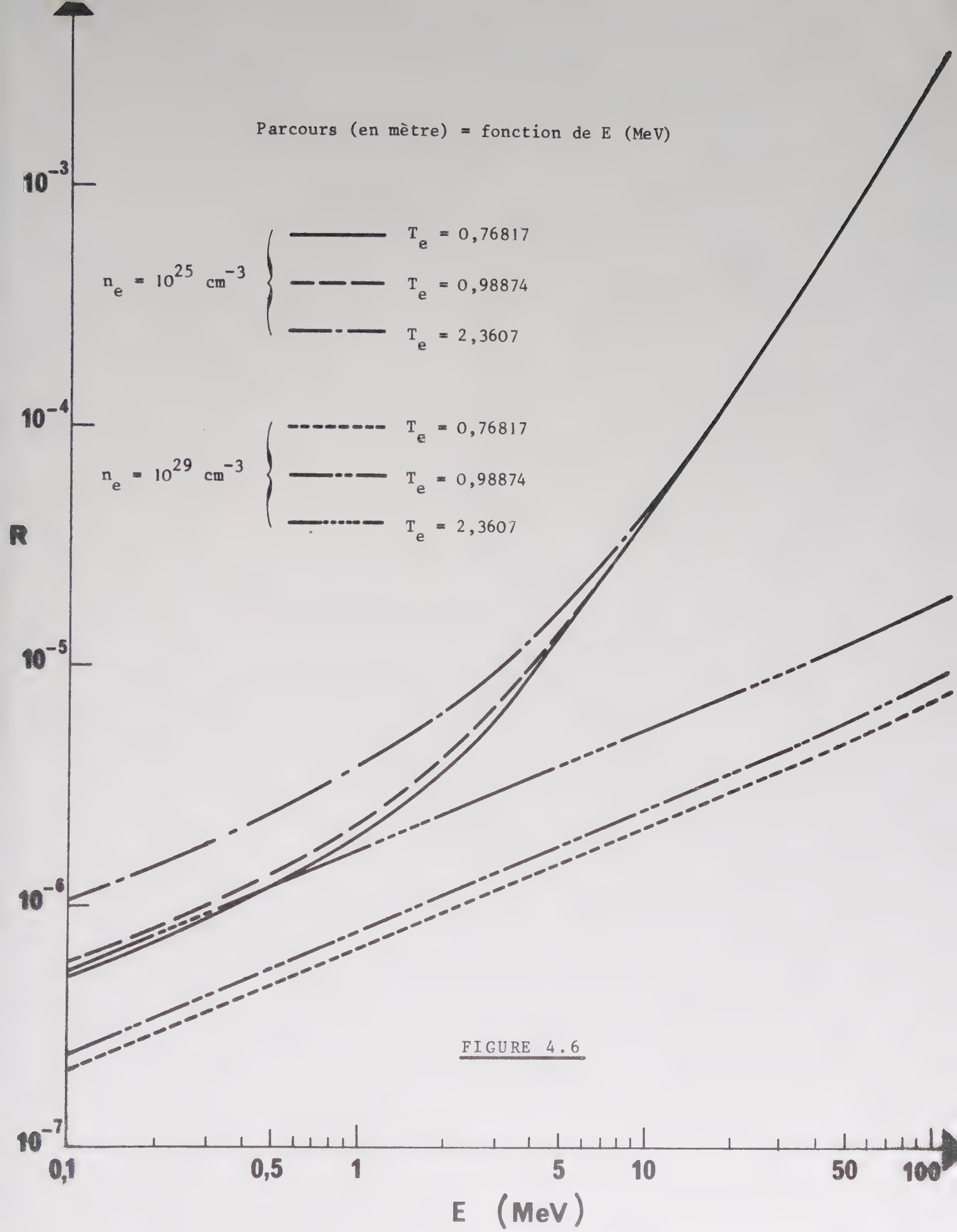

Parcours (en mètre) = fonction de E (MeV)
$n_e = 10^{25}$ cm^{-3}
T_e = 0,76817
T_e = 0,98874
T_e = 2,3607
$n_e = 10^{29}$ cm^{-3}
T_e = 0,76817
T_e = 0,98874
T_e = 2,3607
R
10^{-3}
10^{-4}
10^{-5}
10^{-6}
10^{-7}
0,1
0,5
1
5
10
50
100
E (MeV)

FIGURE 4.6

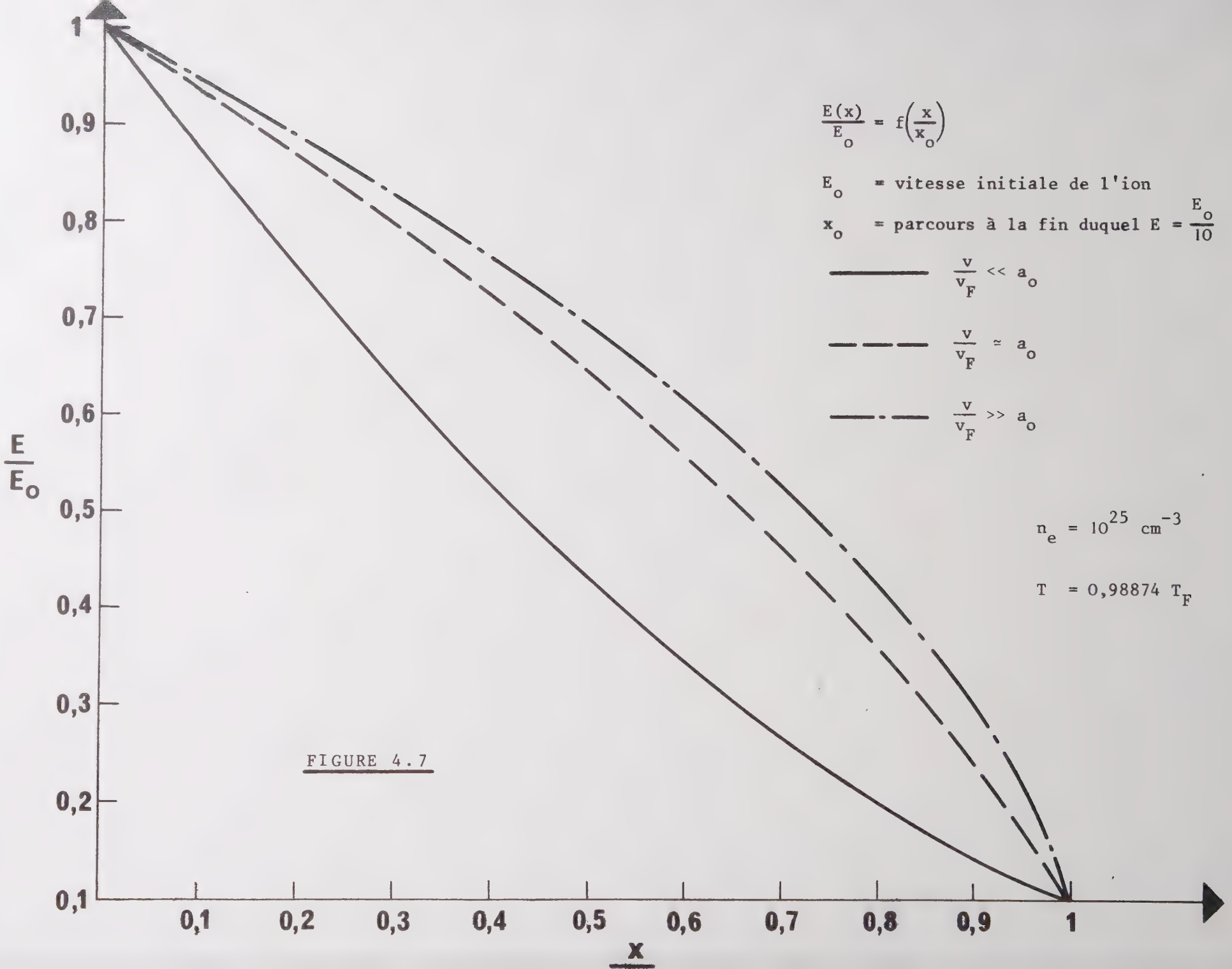

$\frac{E(x)}{E_o} = f\left(\frac{x}{x_o}\right)$
E_o = vitesse initiale de l'ion
x_o = parcours à la fin duquel $E = \frac{E_o}{10}$
$\frac{v}{v_F} << a_o$
$\frac{v}{v_F} \simeq a_o$
$\frac{v}{v_F} >> a_o$
$n_e = 10^{25}\ cm^{-3}$
$T = 0{,}98874\ T_F$
$\frac{E}{E_o}$
1
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
0,7
0,8
0,9
1
x

FIGURE 4.7

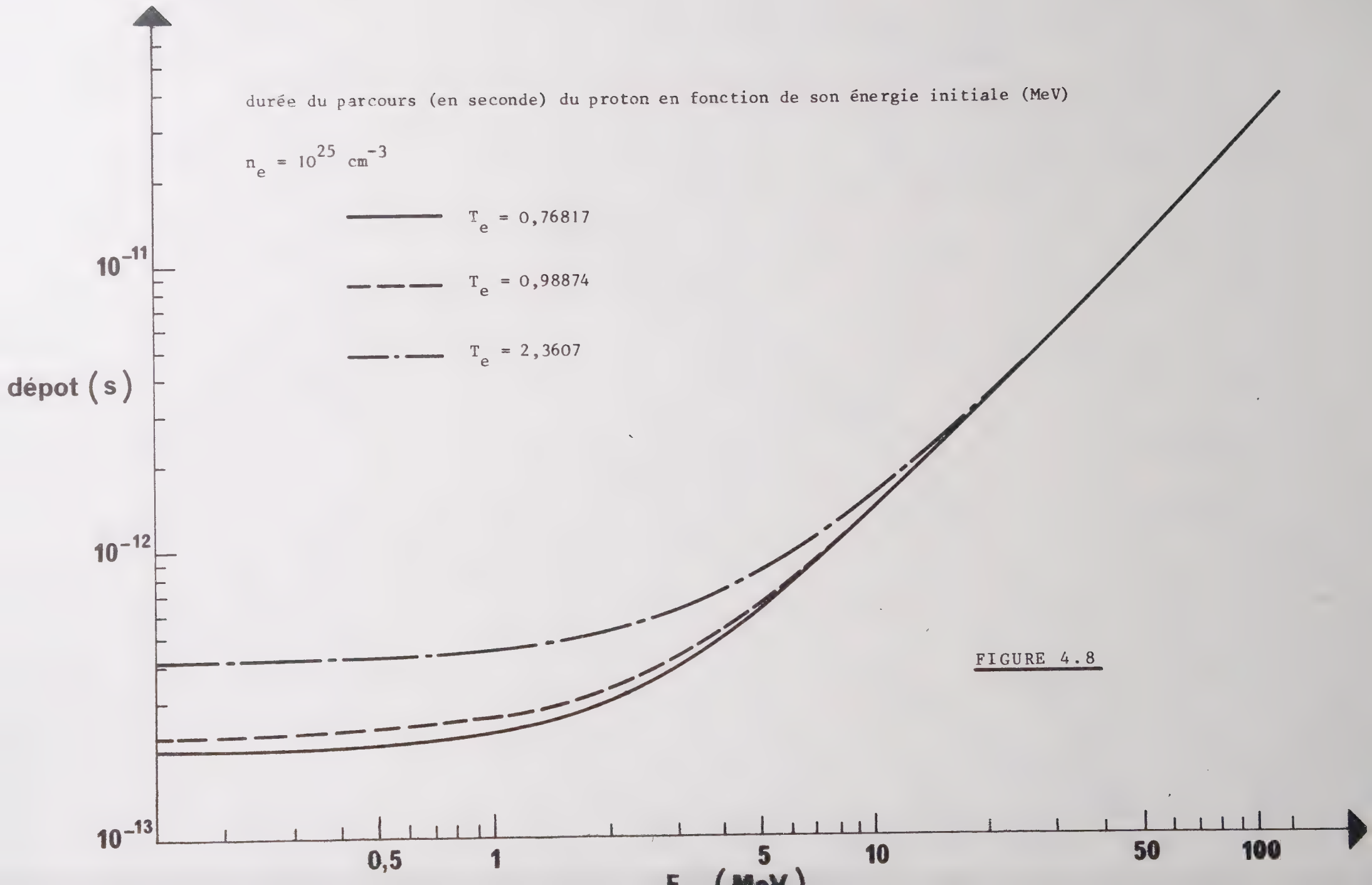

durée du parcours (en seconde) du proton en fonction de son énergie initiale (MeV)
$n_e = 10^{25}$ cm^{-3}
T_e = 0,76817
T_e = 0,98874
T_e = 2,3607
dépot (s)
10^{-11}
10^{-12}
10^{-13}
0,5
1
5
10
50
100
E (MeV)

FIGURE 4.8

Pour les ions très lourds il faut tenir compte des *variations de la charge en fonction de la vitesse*, surtout en fin de parcours.

Il existe des formules semi-empiriques donnant Z(v) mais elles n'ont été vérifiées que sur des plasmas moins denses et, en général, moins chauds que ceux considérés dans ce travail.

Nous donnons ici un exemple de telles formules [15] :

$$Z(v) = Z\left(1 + \left[\frac{v}{v_o}(Z^{\alpha}/v_R)\right]^{1/k}\right)^{-k} \qquad (4.13)$$

avec $\alpha = 0{,}45$, $k = 0{,}6$, $v_o = \frac{e^2}{\hbar} = \frac{c}{137}$

et v_R = vitesse relative moyenne électron-ion.

Nous avons également reporté sur la figure (4.7) l'énergie de l'ion incident en fonction de la distance parcourue. On remarque ainsi qu'à faible vitesse une grande partie de l'énergie est déposée en début de parcours alors qu'à grande vitesse la moitié de l'énergie est déposée dans le dernier quart du parcours.

IV.9. DUREE DU PARCOURS

$$t \text{ dépôt} = \int_{t_o}^{t_1} dt = - \int_{\frac{E_o}{10}}^{E_o} \frac{1}{v} \frac{dE}{\left(\frac{dE}{dx}\right)}$$

Sur la figure (4.8) nous avons reporté le résultat pour un proton incident.

A v incident donné, t dépôt est proportionnel à la masse et inversement proportionnel au carré de la charge.

t dépôt est de l'ordre de quelques picosecondes (10^{-12} sec).

* *
*

CHAPITRE V

DISPERSION EN ENERGIE

V.1. INTRODUCTION

D'après la mécanique quantique l'échange d'énergie entre l'ion incident et le gaz d'électrons se fait par quanta, il en résulte que deux ions ne perdent pas exactement la même quantité d'énergie sur une distance donnée.

V.2. EXPRESSION DE LA DISPERSION EN ENERGIE

Puisque nous avons supposé v << c nous ne considérons que la composante longitudinale du champ électrique. La puissande délivrée par le champ total (extérieur + induit) au plasma s'écrit sous la forme :

$$\frac{dW}{dt} = \sum_{\vec{r}} \vec{j}^{ind}(\vec{r},t).\vec{E}(\vec{r},t)$$

$$= \sum_{\vec{r}} \sum_{\vec{q}'\omega'} \sum_{\vec{q}\omega} \vec{j}^{ind}(\vec{q}',\omega').\vec{E}(\vec{q},\omega) \times \exp\left(i(\vec{q}+\vec{q}').\vec{r}-i(\omega+\omega')t\right)$$

$$= \sum_{\vec{q}',\omega'} \sum_{\vec{q}\omega} \delta(\vec{q}+\vec{q}')\delta(\omega+\omega')\vec{j}^{ind}(\vec{q}',\omega').\vec{E}(\vec{q},\omega)$$

$$\frac{dW}{dt} = \sum_{\vec{q},\omega} \vec{j}^{*ind}(\vec{q},\omega)\vec{E}(\vec{q},\omega)$$

en utilisant (M'4) cela nous donne :

$$\frac{dW}{dt} = \sigma^{\ell}(\vec{q},\omega).\left|\vec{E}(\vec{q},\omega)\right|^2$$

avec $$\sigma^{\ell}(\vec{q},\omega) = \frac{\omega}{4\pi}\,\mathrm{Im}\left(\varepsilon^{\ell}(q,\omega) - 1\right)$$

L'énergie étant échangée par quantum $\hbar\omega$ la probabilité pour le milieu d'absorber $\hbar\omega$ pendant Δt est donnée par :

$$\Delta p(\vec{q},\omega) = \frac{\Delta t.\sigma^{\ell}(q,\omega)}{\hbar\omega}$$

Si l'on suppose que l'ion incident a une énergie bien supérieure à l'énergie échangée, et se trouve en équilibre depuis un temps suffisamment long avec le milieu pour que la distribution en énergie soit gaussienne, la largeur de cette distribution est donnée par la variance notée Ω^2 :

$$\Omega^2 = \frac{\langle (dE)^2\rangle - \langle dE\rangle^2}{\Delta x} = \int_0^{\infty} d\omega\, \frac{\Delta p(\omega)}{\Delta x} \times \hbar^2\omega^2 \times N(\omega)$$

où $N(\omega)$ est la fonction de distribution des photons $\hbar\omega$. On sait que ceux-ci sont des bosons de potentiel chimique nul

$$N(\omega) = \frac{1}{e^{\beta\omega} - 1}$$

Reprenant notre ion incident qui donne $\rho^{ext}(\vec{r},t) = Ze\delta(\vec{r}-\vec{v}t)$ combiné à l'équation de Gauss :

$$\varepsilon^{\ell}(q,\omega)\vec{q}.\vec{E}(\vec{q},\omega) = \frac{\rho^{ext}}{\varepsilon_o}(\vec{q},\omega)$$

nous obtenons, en opérant de la même façon qu'au chapitre II :

$$\Omega^2 = \frac{Z^2e^2\hbar}{2\pi^2\varepsilon_o v^2}\int_0^{\infty}\frac{dq}{q}\int_{-qv}^{+qv} d\omega\omega^2\ \mathrm{Im}\,\frac{1}{\varepsilon(q,\omega)}.N(\omega) \qquad (5.1)$$

Soit avec les mêmes notations que précédemment :

$$\Omega^2 = \frac{Z^2 e^4}{4\pi\varepsilon_o^2} n_e . L_\Omega \qquad (5.2)$$

$$L_\Omega = \frac{12}{\pi}\left(\frac{v_F}{v}\right)^2 \int_o^{\frac{v}{v_F}} u^2 du \int_o^{\infty} \frac{z^4 dz f_2(z,u)}{[z^2+\chi^2 f_1(z,u)]^2+[\chi^2 f_2(z,u)]^2} \times \left[\frac{2}{e^{\frac{4zu}{T_e}}-1} + 1\right] \qquad (5.3)$$

L_Ω est un nombre sans dimension.

La dépendance en température est introduite deux fois : dans $\varepsilon(z,u)$ et dans $N(z\ u)$, la variation de L_Ω avec T_e va donc être plus sensible que pour L_e. On peut penser a priori que plus la température augmente, pour une vitesse donnée, plus chaque choc peut être violent, donc Ω^2 doit augmenter avec la température contrairement à $\frac{dE}{dx}$.

V.3. VARIATION DE L'INTEGRANT ET LIMITE $V << V_{THe}$

La situation se complique un peu par rapport à celle rencontrée pour L_e car nous avons, en plus des 3 zones $u << a_o(T_e)u \simeq a_o(T_e)$ et $u >> a_o(T_e)$, à considérer le rapport $\frac{4zu}{T_e}$.

Le comportement de l'intégrant étant semblable à celui de L_e, nous n'insisterons que sur les particularités de L_Ω. En particulier, comme avec L_e, à u donné, le domaine des z contribuant à L_Ω est $u - 2a_o(T_e) \leq z \leq u + 2a_o(T_e)$ $(z \geq 0)$.

a) $u << a_o(T_e)$

Si nous avons $4 \times 2a_o(T_e) \times \frac{v}{v_F} << T_e$, l'exponentielle dans $N(z\ u)$ peut se développer :

$$\frac{2}{e^{\frac{4zu}{T_e}} - 1} + 1 = \frac{T_e}{2zu} - 1 + \frac{2}{3}\frac{zu}{T_e} + 1 \simeq \frac{T_e}{2zu}$$

et en reportant ce résultat dans L_Ω nous voyons que :

$$\left[8a_o(T_e)\ \frac{v}{v_F} << T_e\right] \Rightarrow \left(\Omega^2 = 2k_B T \times \frac{dE}{dx}\right) \quad [12] \qquad (5.4)$$

ce qui n'est possible que pour $T_e \neq 0$.
$T_e = 0$ est un cas particulier qui doit être étudié à part :

* $\underline{T_e = 0}$:

$$\frac{2}{e^{\frac{4zu}{T_e}} - 1} + 1 = 1$$

d'où $$L_\Omega = \frac{3}{2}\left(\frac{v}{v_F}\right)^2 \times \int_o^1 \frac{z^4 dz}{[z^2+\chi^2 f_1(z,0)]^2} \qquad (5.5)$$

et $$\Omega^2 = \frac{Z^2 e^4}{4\pi\varepsilon_o^2} n_e \times \frac{3}{2}\frac{E}{\varepsilon_F^o} \times I_\Omega \times \frac{m_e}{M} \qquad (5.6)$$

avec $$I_\Omega = \int_o^1 \frac{z^4 dz}{[z^2+\chi^2 f_1(z,0)]^2}$$

* $\underline{T_e \neq 0}$

Deux cas sont ici possibles :

$$-\frac{T_e}{a_o(T_e)} \geq 1$$

Dans ce cas $\frac{v}{v_F} << a_o(T_e)$ conduit à (5.4)

$$-T_e << a_o(T_e)$$

Nous avons alors à très faible vitesse $8\, a_o(T_e)\frac{v}{v_F} << T_e$ et donc la relation (5.4) mais à vitesse plus élevée se rajoute la possibilité d'avoir $\frac{v}{v_F} << a_o(T_e)$ et $\frac{v}{v_F} >> \frac{T_e}{8a_o(T_e)}$ et ainsi d'obtenir la relation (5.6).

b) $u \simeq a_o(T_e)$

N(z u) est pratiquement nul à faible T_e mais donne encore une contribution à haute température. Le facteur zu qui s'ajoute dans L_Ω par rapport à L_e étend l'intégrant vers des z un peu plus importants.

c) $u >> a_o(T_e)$

Nous avons, ici aussi, les deux contributions distinctes des chocs binaires et de la résonance plasma. Mais on s'attend, pour Ω^2, à ce que les chocs proches soient plus importants que dans le cas du pouvoir d'arrêt.

En effet plus les quanta d'énergie sont grands, plus la dispersion en énergie se fait sentir. Ceci peut se vérifier en étudiant $f(z,u) = zu \times \left[\frac{2}{e^{\frac{4zu}{T_e}} - 1} + 1\right]$ qui est le facteur multiplicatif permettant de passer de L_e à L_Ω. Etudier f(z,u) revient à considérer g(x) définie par :

$$g(x) = x\left(\frac{2}{e^x - 1} + 1\right) \quad \text{en particulier}$$

$$g'(x) = e^x \frac{(e^x - 1 - x)}{(e^x - 1)^2}$$

g'(x) est toujours positif puisque son numérateur peut se mettre sous la forme $e^x\left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^u}{n!}\right)$

g(x) est donc une fonction monotone, croissante et positive.
g(x) contribue ainsi à augmenter la contribution des chocs binaires devant la contribution du mode plasma. Ces deux contributions étant égales dans L_e les chocs proches deviennent dominants pour L_Ω.

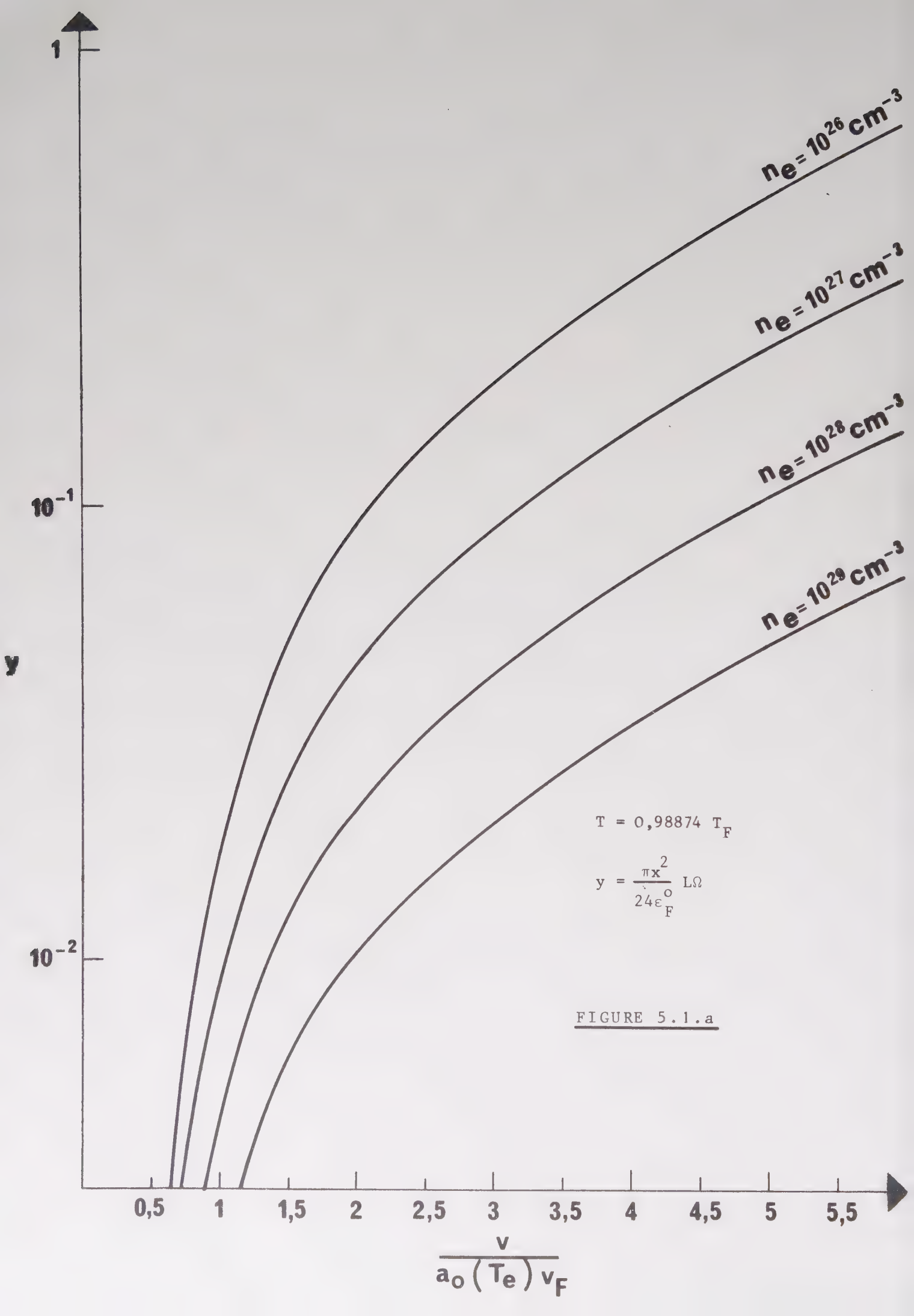

1
10^{-1}
10^{-2}
y
$n_e = 10^{26}\ cm^{-3}$
$n_e = 10^{27}\ cm^{-3}$
$n_e = 10^{28}\ cm^{-3}$
$n_e = 10^{29}\ cm^{-3}$
$T = 0{,}98874\ T_F$
$y = \frac{\pi x^2}{24\varepsilon_F^o}\ L\Omega$
0,5
1
1,5
2
2,5
3
3,5
4
4,5
5
5,5
$\frac{v}{a_o(T_e)\,v_F}$

FIGURE 5.1.a

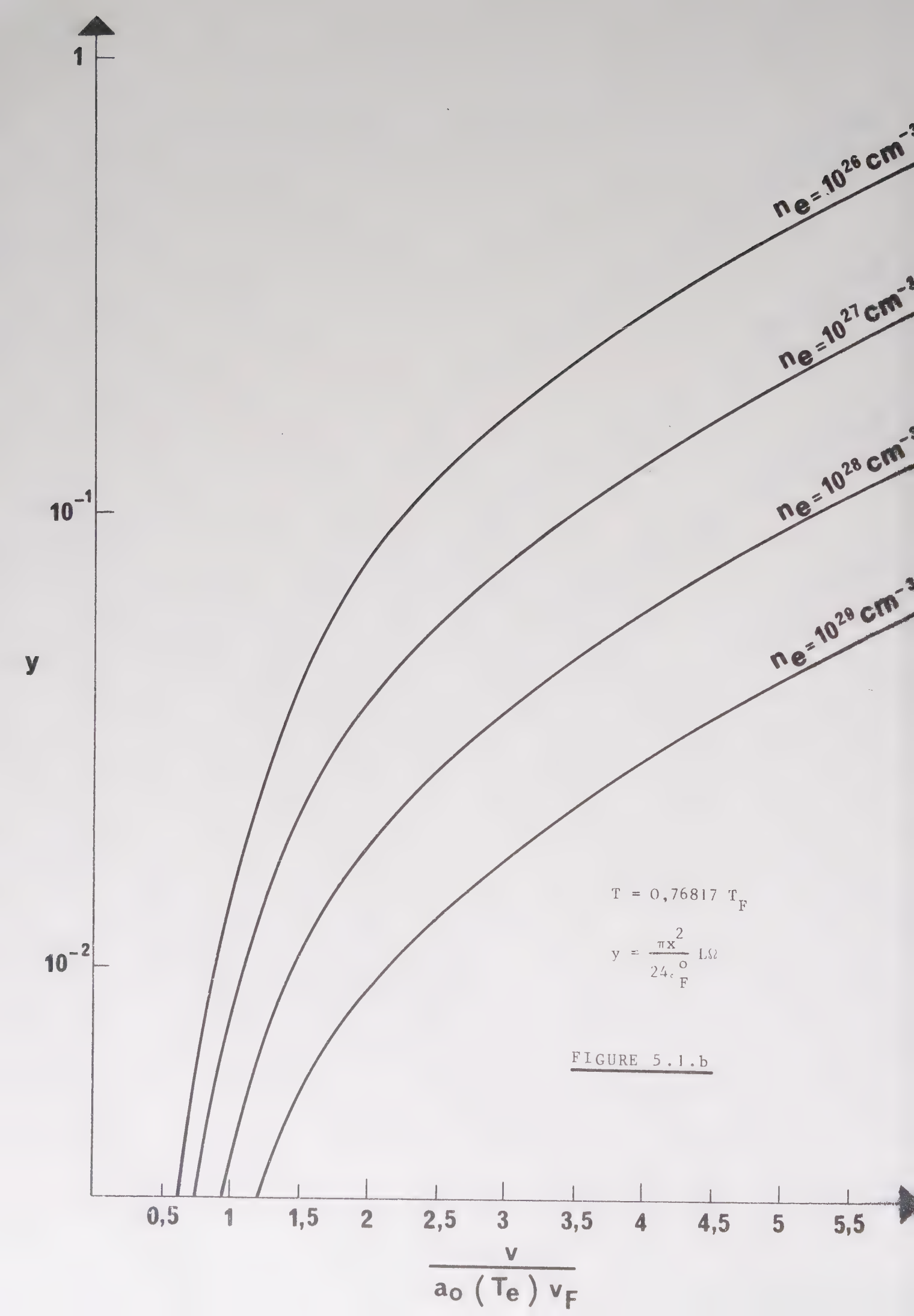

1
10^{-1}
10^{-2}
y
$n_e = 10^{26}\ cm^{-3}$
$n_e = 10^{27}\ cm^{-3}$
$n_e = 10^{28}\ cm^{-3}$
$n_e = 10^{29}\ cm^{-3}$
$T = 0{,}76817\ T_F$
$y = \frac{\pi x^2}{24 \epsilon_o} L\Omega$
0,5
1
1,5
2
2,5
3
3,5
4
4,5
5
5,5
$\frac{v}{a_o (T_e) v_F}$

FIGURE 5.1.b

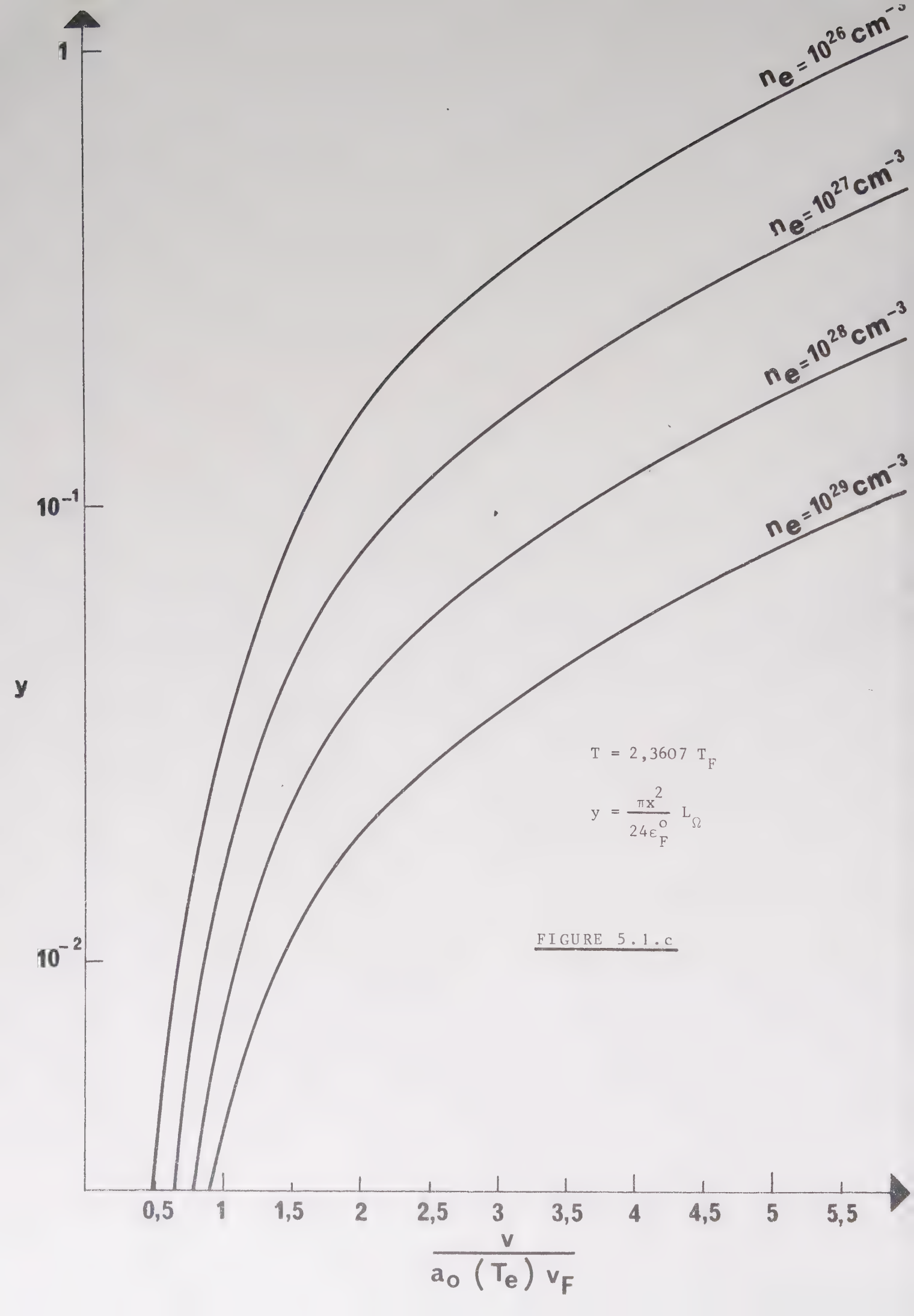

1
10^{-1}
10^{-2}
y
$n_e = 10^{26}\,cm^{-3}$
$n_e = 10^{27}\,cm^{-3}$
$n_e = 10^{28}\,cm^{-3}$
$n_e = 10^{29}\,cm^{-3}$
$T = 2{,}3607\ T_F$
$y = \frac{\pi x^2}{24\varepsilon_F^o}\ L_\Omega$
0,5
1
1,5
2
2,5
3
3,5
4
4,5
5
5,5
$\frac{v}{a_o\,(T_e)\,v_F}$

FIGURE 5.1.c

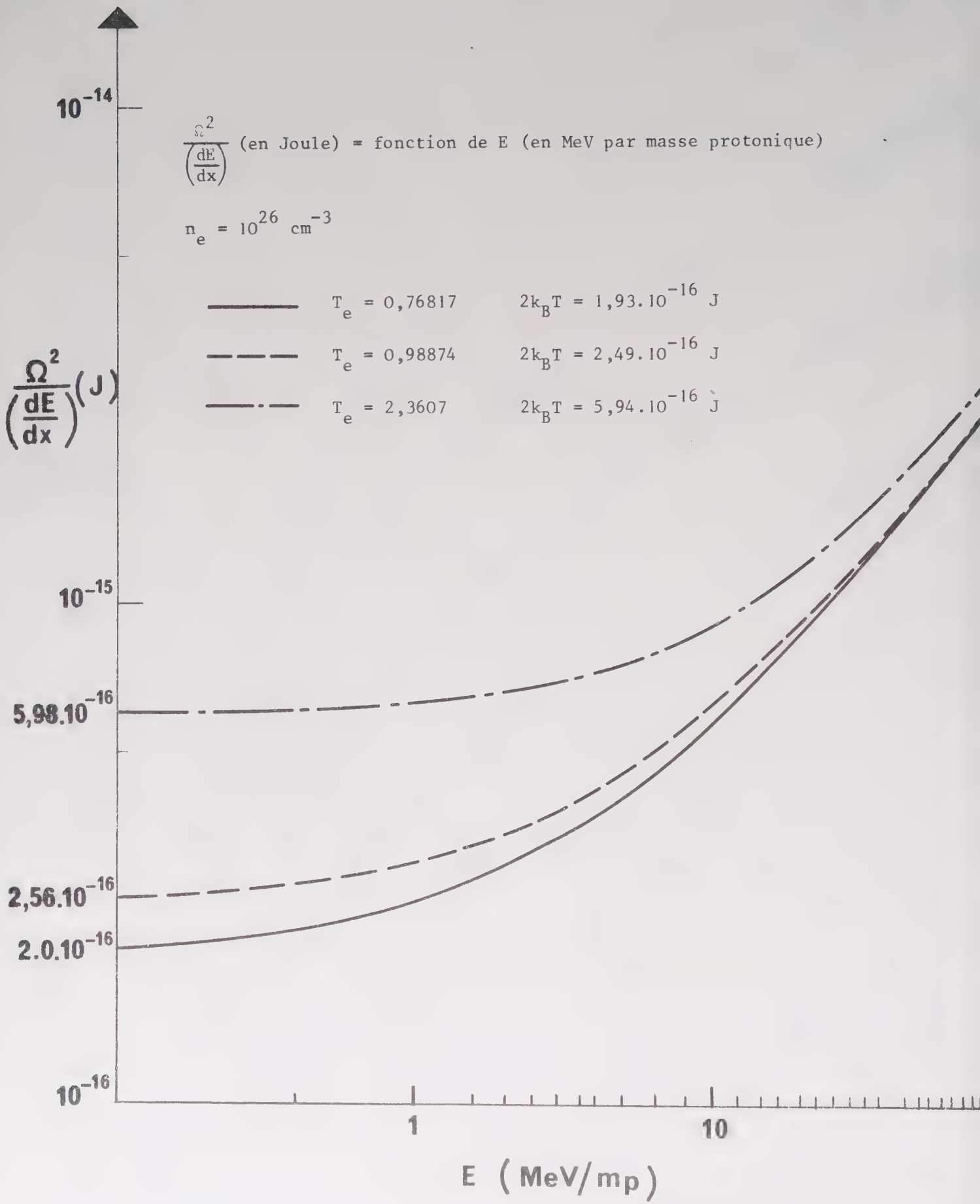

$\frac{\Omega^2}{\left(\frac{dE}{dx}\right)}$ (en Joule) = fonction de E (en MeV par masse protonique)
$n_e = 10^{26}$ cm^{-3}
T_e = 0,76817 $2k_BT = 1,93.10^{-16}$ J
T_e = 0,98874 $2k_BT = 2,49.10^{-16}$ J
T_e = 2,3607 $2k_BT = 5,94.10^{-16}$ J
$\frac{\Omega^2}{\left(\frac{dE}{dx}\right)}$ (J)
10^{-14}
10^{-15}
$5,98.10^{-16}$
$2,56.10^{-16}$
$2.0.10^{-16}$
10^{-16}
1
10
E (MeV/mp)

FIGURE 5.2

Le calcul numérique de L_Ω doit être fait en prenant les mêmes précautions que pour le calcul de L_e.

Nous avons reporté nos résultats dans les figures (5.1) avec les mêmes valeurs de T_e et n_e qu'aux chapitres précédents.

Lorsque $\frac{v}{a_o(T_e)v_F} << 1$, T_e étant de l'ordre de 1, nous vérifions la relation (5.4) : $\Omega^2 = 2kT\left(\frac{dE}{dx}\right)$ (résultat dans figure (5.2)).

V.4. LIMITE GRANDE VITESSE

Ω^2 fait intervenir dans son intégrale le produit $\omega^2 \operatorname{Im} \frac{1}{\varepsilon(q,\omega)}$ pour lequel aucune règle de somme simple n'est connue. Nous n'avons donc pas pu déterminer la constante entrant dans le développement de L_Ω à grande vitesse et nous nous contenterons donc des termes supérieurs.

V.4.a. PARTIE RESONNANTE

A l'approximation prise, nous avons $z_r^2 = \frac{\chi^2}{3u^2}$ et donc $\frac{4z_r u}{T_e} = \frac{4}{T_e}\sqrt{\frac{\chi^2}{3}}$. L'intégration sur les z nous donne :

$$\frac{6v_F^2}{\chi^2 v^2} \times z_r^3(u)\left[\frac{2}{e^{\frac{4}{T_e}\sqrt{\frac{\chi^2}{3}}} - 1} + 1\right]$$

Ainsi, avec v_1 et v_2 vérifiant $v >> v_F a_o(T_e)$, nous obtenons :

$$L_{\Omega R}(v_1) - L_{\Omega R}(v_2) = \frac{6v_F^2}{\chi^2 v^2}\int_{\frac{v_2}{v_F}}^{\frac{v_1}{v_F}} z_r^3(u)u^2 du \left[\frac{2}{e^{\frac{4}{T_e}\sqrt{\frac{\chi^2}{3}}} - 1} + 1\right]$$

Ce qui conduit à :

$$L_{\Omega R}(v) = \sqrt{\frac{\chi^2}{3}} \times \frac{v_F^2}{v^2} \times \left[\frac{2}{e^{\frac{4}{T_e}\sqrt{\frac{\chi^2}{3}}} - 1} + 1 \right] \times \mathrm{Log}(v^2)$$

Ceci peut se résumer en :

$$\Omega_R^2(v) = k_B T \times X_T \frac{dE(v)}{dx} \qquad (5.7)$$

avec $$X_T = \frac{\hbar\omega_p}{2k_B T} \left[\frac{2}{e^{\frac{\hbar\omega_p}{k_B T}} - 1} + 1 \right]$$

et comme limites :

$$-\frac{\hbar\omega_p}{k_B T} << 1 : X_T = 1 \quad \text{et} \quad \Omega^2 R(v) = k_B T \left(\frac{dE}{dx}\right)$$

$$-\frac{\hbar\omega_p}{k_B T} >> 1 : X_T = \frac{\hbar\omega_p}{2k_B T} \quad \text{et} \quad \Omega_R^2(v) = \frac{\hbar\omega_p}{2} \left(\frac{dE}{dx}\right)$$

V.4.b. PARTIE CHOCS PROCHES

z est de l'ordre de u et u >> $a_o(T_e)$.

Dans ce cas N(z u) = 0 et nous obtenons :

$$L_{\Omega p}(v_1) - L_{\Omega p}(v_2) = \frac{12}{\pi}\left(\frac{v_F}{v}\right)^2 \int_{\frac{v_2}{v_F}}^{\frac{v_1}{v_F}} u^2 du \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\pi T_e}{8z} \mathrm{Log}\left[1 + e^{\alpha - \frac{(z-u)^2}{T_e}}\right] dz$$

soit :

$$L_{\Omega p}(v_1) - L_{\Omega p}(v_2) = 3T_e^{3/2}\left(\frac{v_F}{v}\right)^2 \int_{\frac{v_2}{v_F}}^{\frac{v_1}{v_F}} u^2 du \times \frac{1}{u}\left[F_{1/2}(\alpha^e) + \frac{T_e}{3u^2} F_{3/2}(\alpha^e)\right]$$

et finalement :

$$L_{\Omega p}(v) = \left(\frac{v_F}{v}\right)^2 \left[\left(\frac{v}{v_F}\right)^2 + \frac{T_e}{3} \times \frac{F_{3/2}(\alpha^e)}{F_{1/2}(\alpha^e)} \times \mathrm{Log}\left(\frac{v}{v_F}\right)^2\right]$$

Donc, en négligeant la constante éventuelle, nous avons lorsque $\frac{v}{a_o(T_e)v_F} >> 1$:

$$\Omega^2 = \frac{Z^2 e^4 n_e}{4\pi\varepsilon_o^2} \times \left(\frac{v_F}{v}\right)^2 \times \left[\left(\frac{v}{v_F}\right)^2 + \frac{T_e}{3} \frac{F_{3/2}(\alpha^e)}{F_{1/2}(\alpha^e)} \mathrm{Log}\left(\frac{v}{v_F}\right)^2\right] + k_B T X_T \left(\frac{dE}{dx}\right) \tag{5.8}$$

qui est un résultat nouveau valable à toute dégénérescence.

V.5. DISPERSION EN ENERGIE INTEGREE SUR UN PARCOURS

De la même façon que nous avons obtenu l'énergie d'un ion en fonction de la distance qu'il a parcourue, il peut être intéressant de connaître la dispersion en énergie d'un faisceau d'ions ayant parcouru une distance moyenne x. Cette dispersion, notée ΔE^2, s'obtient, en supposant $\Delta E^2/E^2$ petit, par l'intégration de Ω^2. Ainsi nous définissons :

$$\Delta E^2 = \int_o^x \Omega^2 dx = \int_{E_o}^{E(x)} \Omega^2 \frac{dE}{\left(\frac{dE}{dx}\right)} \tag{5.9}$$

L'égalité (5.9) nous donne $\Delta E^2 = f(E)$ et utilisant les résultats reportés figure (4.7) qui nous donne $E = g(x)$ nous

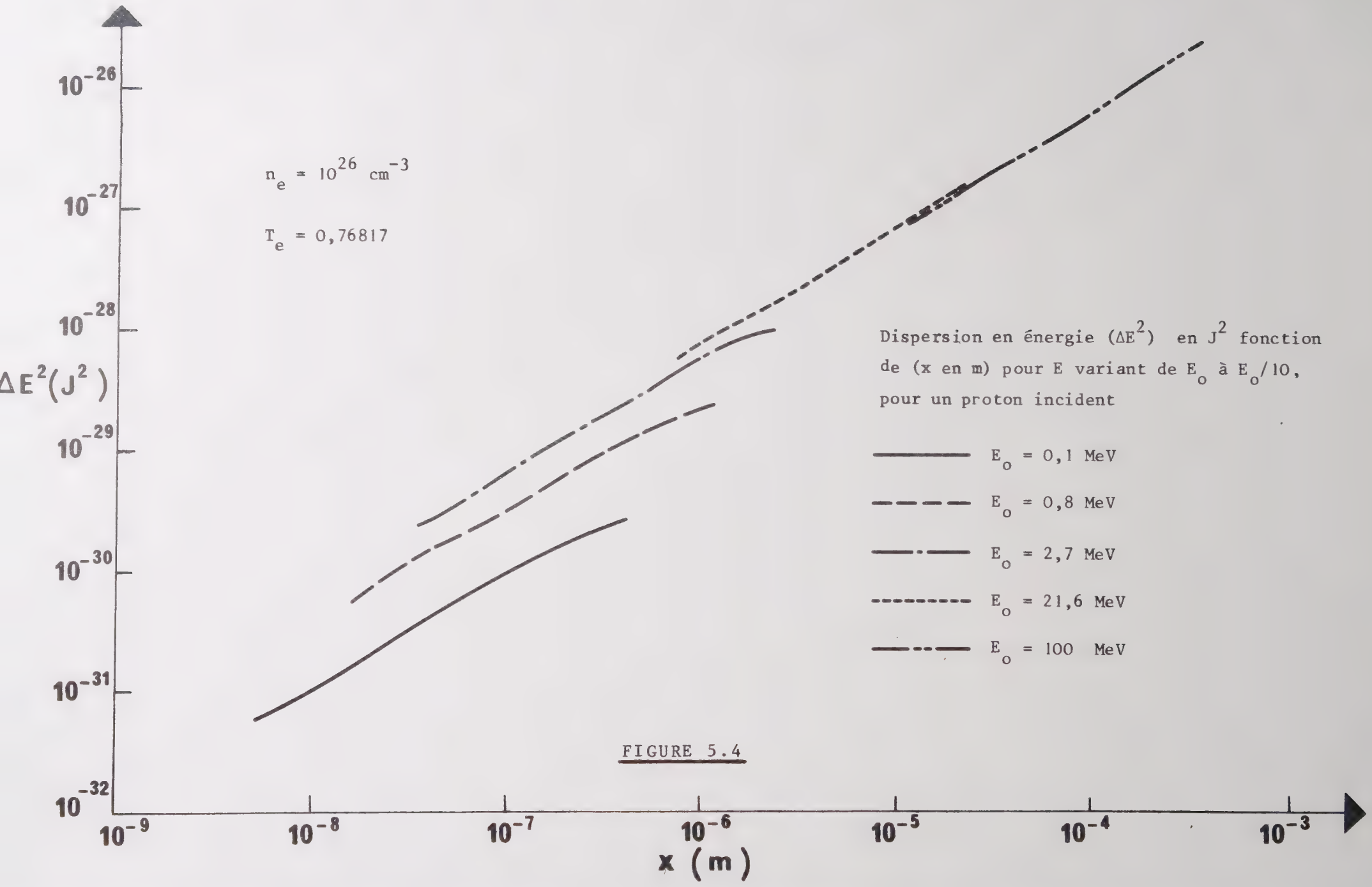

$n_e = 10^{26}\ cm^{-3}$
$T_e = 0,76817$
Dispersion en énergie (ΔE^2) en J^2 fonction de (x en m) pour E variant de E_o à $E_o/10$, pour un proton incident
E_o = 0,1 MeV
E_o = 0,8 MeV
E_o = 2,7 MeV
E_o = 21,6 MeV
E_o = 100 MeV
$\Delta E^2(J^2)$
10^{-26}
10^{-27}
10^{-28}
10^{-29}
10^{-30}
10^{-31}
10^{-32}
10^{-9}
10^{-8}
10^{-7}
10^{-6}
10^{-5}
10^{-4}
10^{-3}
x (m)

FIGURE 5.4

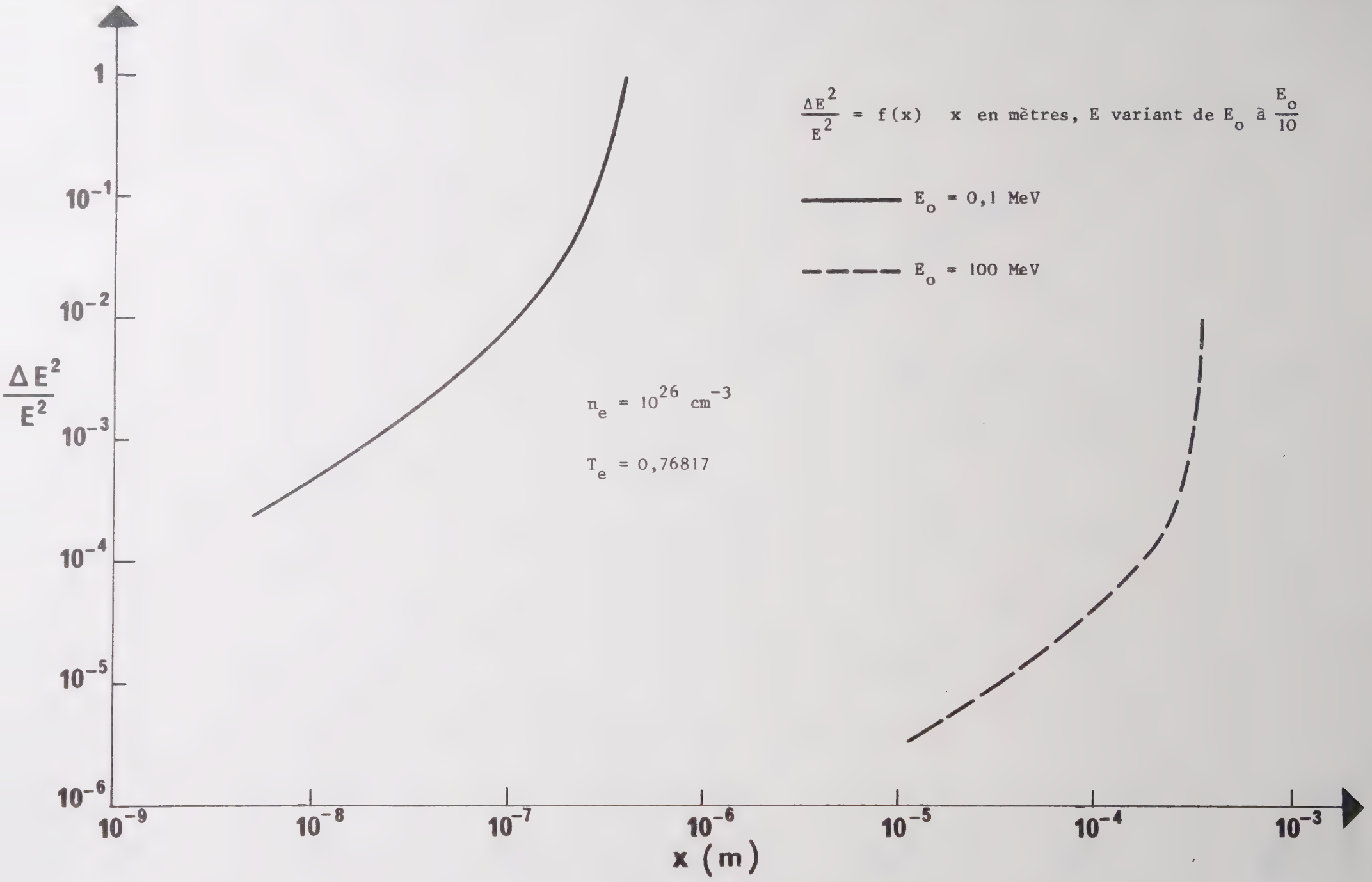

$\frac{\Delta E^2}{E^2} = f(x)$ x en mètres, E variant de E_o à $\frac{E_o}{10}$
E_o = 0,1 MeV
E_o = 100 MeV
$n_e = 10^{26}$ cm^{-3}
T_e = 0,76817
$\frac{\Delta E^2}{E^2}$
1
10^{-1}
10^{-2}
10^{-3}
10^{-4}
10^{-5}
10^{-6}
10^{-9}
10^{-8}
10^{-7}
10^{-6}
10^{-5}
10^{-4}
10^{-3}
x (m)

FIGURE 5.5

obtenons ainsi la relation entre ΔE^2 et x pour un ion incident d'énergie E_o donné. Nous avons reporté le résultat d'un calcul figure (5.4) pour un proton incident, et sur la figure (5.5) nous avons reporté le rapport $\Delta E^2/E^2$, qui est supposé inférieur à l'unité, ce qui est vérifié, mis à part en fin de parcours.

Supposons un faisceau de N_o ions incidents, parallèle à l'axe des x et monocinétique à l'abscisse x = O. Nous avons admis qu'à l'abscisse x nous avions une distribution gaussienne. Soit :

$$N(E)_x = A.e^{-\frac{(E-b)^2}{c}}, \quad \text{il s'ensuit}$$

$$\langle E \rangle = \int_o^\infty \frac{EA.e^{-\frac{(E-b)^2}{c}}}{N_o} dE = b = E(x) \quad \text{(valeur reportée figure (4.7))}$$

$$\left\{ N_o = \int_o^\infty N(E)dE = Ac\sqrt{\pi} \right\} \Rightarrow \left\{ A = \frac{N_o}{c\sqrt{\pi}} \right\}$$

$$\langle E^2 \rangle = \int_o^\infty E^2 N(E)dE = E_o^2 + \frac{N_o c^2}{2}$$

ainsi :

$$\Delta E^2 = \frac{1}{N_o}\left[\langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2 \right] = \frac{c^2}{2}$$

Finalement $$N(E)_x = \frac{N_o}{\sqrt{2\pi\Delta E^2}} e^{-\frac{\{E-E(x)\}^2}{2\Delta E^2}}$$

avec ΔE^2 donné par (5.9) et E(x) reporté figure (4.7).

* *
*

CHAPITRE VI

CONTRIBUTIONS DES IONS DU PLASMA

VI.1. DESCRIPTION DU PLASMA

Le pouvoir d'arrêt est toujours, dans notre approximation linéaire, obtenu par la formule (2.1) mais maintenant nous faisons intervenir également les ions dans la constante diélectrique.

Soit donc un plasma constitué d'ions complètement ionisés de charge $Z_i e$, masse m_i, densité n_i et température T^i et d'électrons de densité $n_e = Z_i n_i$ et de température T^e. A priori, comme c'est probablement le cas dans une partie du déroulement de l'interaction cible-faisceau dans la fusion inertielle, $T^e \neq T^i$ ($T^e \geq T^i$).

Nous supposons le plasma suffisamment chaud ou dense pour que le gaz d'ions et le gaz d'électrons puissent être considérés microscopiquement et macroscopiquement homogènes (en particulier l'énergie cinétique des électrons doit être suffisante pour que l'on puisse négliger la possibilité d'accumulation d'électrons autour d'un ion) et peu corrélés.

Les conditions sont alors suffisantes pour utiliser l'A.P.A. et nous pouvons alors écrire :

$$\varepsilon_{A.P.A.} = 1 + \frac{e^2}{\varepsilon_o q^2}\left[4\varepsilon_o \frac{\alpha r s^e}{\pi} \frac{q_F^{e2}}{e^2} g^e[Z^e, u^e]\right.$$

$$\left. + 4\varepsilon_o \frac{\alpha r s^i}{\pi} \frac{q_F^{i2}}{e^2} Z_i^2 g^i(z^i, u^i)\right]$$

avec : $q_F^{e,i} = (3\pi^2 n_{e,i})^{1/3}$, $\alpha rs^{e,i} = \frac{m_{e,i} e^2}{4\pi\varepsilon_o q_F^{e,i} \hbar^2}$, $z^{e,i} = \frac{q}{2q_F^{e,i}}$

$$u^{e,i} = \frac{\omega}{q v_F^{e,i}}, \quad g^{e,i} = f_1^{e,i} + i f_2^{e,i}$$

f_1 et f_2 étant les fonctions données en (3.2) et (3.3) respectivement, en convenant de ne pas mettre d'indice pour les électrons cela donne :

$$\varepsilon(z,u) = 1 + \frac{\chi^2}{z^2}\left[g(z,u) + \frac{m_i}{m_e} Z_i^{5/3} g^i\left(Z_i^{1/3} z, \frac{m_i}{m_e} Z_i^{1/3} u\right)\right] \quad (6.1)$$

Le freinage d'un ion incident dans un tel plasma se décompose en deux parties :

* Le freinage par les ions, ceux-ci étant écrantés par le fluide d'électrons et d'ions, nous noterons $\frac{dE^i}{dx}$ le pouvoir d'arrêt associé.

* Le freinage par les électrons, ceux-ci étant écrantés par le plasma électron-ion, on notera $\frac{dE^e}{dx}$ le pouvoir d'arrêt associé.

VI.2. FREINAGE PAR LES ELECTRONS DU PLASMA

$$-\frac{dE^e}{dx} = \frac{Z^2 e^4}{4\pi\varepsilon_o m_e v^2} \cdot n_e \cdot L^e \quad (6.2)$$

$$L^e = \frac{6}{\pi\chi^2} \int_o^{\frac{v}{v_F}} u\,du \int_o^{\infty} z^3 dz \, \frac{\chi^2 f_2(z,u)}{[z^2+\chi^2 G_1(z,u)]^2 + [\chi^2 G_2(z,u)]^2} \quad (6.3)$$

avec $G(z,u) = G_1(z,u) + iG_2(z,u)$

$G(z,u)$ étant la fonction entre parenthèses de l'équation (6.1).

Pour aller plus loin dans l'étude, il nous faut préciser les valeurs relatives de T^e et T^i.

Rappelons que nous nous plaçons toujours dans le cas où $(E >> K_b T^e)$ donc aussi $(E >> K_b T^i)$, nous supposons que T^e et T^i sont du même ordre de grandeur.

Soit $$\left(Mv^2 >> m_e v_{THe}^2\right) \Leftrightarrow \left(\frac{v}{a_o(T_e) v_f} >> \frac{m_e}{M}\right)$$

et donc $$\frac{m_i}{m_e} Z_i^{1/3} . \left(\frac{v}{a_o(T_e) v_F}\right) >> \frac{m_i}{\sqrt{m_e M}} Z_i^{1/3}$$

On a pratiquement toujours, sauf si $T^i << T^e$, $T^i >> 1$, c'est-à-dire que les ions sont non dégénérés.

Dans ce cas :

$$a_o^i(T_i) \simeq \sqrt{T_i} \simeq \sqrt{\frac{m_i}{m_e}}\, a_o(T_e)$$

D'où $$\frac{m_i}{m_e} Z_i^{1/3} \frac{v}{a_o^i(T_i) v_F} >> \sqrt{\frac{m_i}{M}} \simeq 1$$

donc pour u proche de $\frac{v}{v_F}$, $E >> k_B T^e$ implique que nous soyons à grande vitesse de phase pour les ions. C'est-à-dire que l'ion incident est supposé aller toujours plus vite que la vitesse thermique ionique.

* $u \geq a_o(T_e)$

Dans ce cas on peut vérifier immédiatement que les ions ne jouent pratiquement aucun rôle. En effet $f_2(z,u)$ n'est $\neq 0$ qu'autour de $z = u$ où $Im(g_i)$ est tout à fait négligeable et $Réel(g_i) = \frac{m_e Z_i}{m_i 3u^2}$, qui est donc dans le rapport des masses avec la partie électronique. Et de même pour la partie résonnante.

* $u << a_o(T_e)$

Dans ce cas les ions donnent une contribution petite mais moins négligeable que précédemment. Ils interviennent en augmentant la partie imaginaire et en perturbant la partie réelle autour du mode plasma ionique.

VI.3. EXEMPLE

Pour chiffrer cet effet d'écrantage ionique nous avons pris l'exemple de particules α produites lors de la fusion du deutérium et du tritium. Ces particules ont, au départ, une énergie de 3,5 MeV. Une configuration souvent réalisée lors de la fusion est celle où, autour du mélange D-T, un matériau lourd comprime le mélange D-T. Lequel pourrait [14] renvoyer, par diffusions multiples, les particules α dans le combustible. Ce matériau est alors très dense et nous sommes dans les conditions où $\frac{v}{a_o(T_e)v_F}$ peut être << 1. Nous considérons $T^e = T^i$ et $T^e = 0,989\,T_F$.

Tableau des valeurs de $\frac{v}{a_o(T_e)v_F}$

E_α	3,5 MeV	1 MeV	0,28 MeV
$n_e = 10^{27}\ cm^{-3}$	0,29	0,155	0,072
$n_e = 10^{28}\ cm^{-3}$	0,13	0,07	

Nous avons calculé $\frac{dE^e}{dx}$ pour Au et reporté ci-dessous le rapport $\left(\frac{dE}{dx}\right)$ écranté par e + i/$\left(\frac{dE}{dx}\right)$ écranté seulement par e.

Pour $E >> k_B T^e$ la contribution des ions à l'écrantage ne modifie le pouvoir d'arrêt que de quelques 10^{-3}.

L'écrantage supplémentaire des ions ne joue donc un rôle sensible que pour des vitesses incidentes très faibles. Le rapport calculé donne :

E_α	3,5 MeV	1 MeV	0,22 MeV
$n_e = 10^{27}\ cm^{-3}$	1.000	1.000	1.003
$n_e = 10^{28}\ cm^{-3}$	1.000	1.001	

VI.4. FREINAGE PAR LES IONS DU PLASMA

Mis à part l'écrantage des électrons le pouvoir d'arrêt est ici purement classique car, surtout pour un matériau lourd, la correction par rapport à l'approximation linéaire est beaucoup plus importante que la diffraction. Nous allons simplement donner ici les résultats déjà existants. Nous nous limiterons au cas où $\frac{v}{a_o(T_e)v_F} << 1$, mais par contre $\frac{v}{v_{THi}} >> 1$, en reprenant l'exemple de notre paritcule α de 3,5 MeV dans un plasma d'or avec $n_e = 10^{27}\ cm^{-3}$. Nous suivons le calcul de Jackson considéré par Mehlhorn [27] en faisant deux remarques :

* La distance d'écrantage est donnée par $\frac{1}{\lambda_e^2} = q_{TF}^2 \times g_o(T_e)$

* Mehlhorn reprend le calcul fait pour les électrons et l'applique aux ions, il commet l'erreur de négliger l'écrantage des électrons qui amortit le mode plasma ionique.

Seuls les chocs proches doivent être considérés, avec le résultat :

$$\left(\frac{dE}{dx}\right)_{ion.} = \frac{Z^2 e^2 Z_i \omega_p^2 m_e}{4\pi\varepsilon_o v^2 m_i} \text{Log}\left(\frac{m_i M v^2 \lambda_e}{(m_i+M)\times 1,47\times Z Z_i e^2}\right)$$

Dans l'exemple qui a été précisé plus haut, nous avons calculé le rapport pouvoir d'arrêt ionique sur pouvoir d'arrêt électronique à une température $T^e = T_F$. Comme nous avons toujours $v >> v_{THi}$, la température ionique ne joue en fait aucun rôle dans le pouvoir d'arrêt. Les résultats ont été reportés dans le tableau (5). Nous pouvons ainsi remarquer que le freinage par les ions du plasma n'est plus négligeable dans les conditions considérées, en particulier, par Skupsky [14], qui a étudié la compétition entre diffusions multiples et pouvoir d'arrêt des particules α dans un plasma d'or à des densités allant jusqu'à 5.10^{27} cm^{-3}. On fait alors une erreur non négligeable en ne tenant compte que du pouvoir d'arrêt électronique.

Eα(MeV)	L(v) ionique	L(v) elect.	Rapport
$2,6 \times 10^{-2}$	$2,29 \times 10^{-3}$	$2,69 \times 10^{-5}$	8,5
$1,04 \times 10^{-1}$	$5,32 \times 10^{-4}$	$2,13 \times 10^{-4}$	2,5
$4,16 \times 10^{-1}$	$8,35 \times 10^{-4}$	$2,15 \times 10^{-3}$	0,4
0,94	$1,01 \times 10^{-3}$	$5,7 \times 10^{-3}$	0,2
1,66	$1,13 \times 10^{-3}$	$1,35 \times 10^{-2}$	0,08
3,15	$1,27 \times 10^{-3}$	$3,57 \times 10^{-2}$	0,04

TABLEAU 5

Comparaison entre pouvoir d'arrêt ionique et électronique d'une particule α dans un plasma d'or à $T = T_F$ et $n_e = 10^{27}\ cm^{-3}$.

$$\left(\frac{dE}{dx}\right)_{ionique} = \frac{Z^2 e^2 \omega_p^2}{(4\pi\varepsilon_o)v^2} \times L(v)_{ionique}$$

$$\left(\frac{dE}{dx}\right)_{électronique} = \frac{Z^2 e^2 \omega_p^2}{(4\pi\varepsilon_o)v^2} \times L(v)_{électr.}$$

$$\text{Rapport} = \frac{(dE/dx)_{ionique}}{(dE/dx)_{électronique}} = \frac{L(v)_{ionique}}{L(v)_{électronique}}$$

* *
*

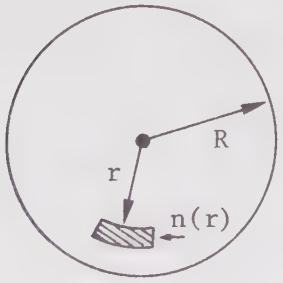
CHAPITRE VII

AMELIORATION DE LA DESCRIPTION DE L'INTERACTION ION - PLASMA

L'amélioration la plus urgente lorsque n_e décroît depuis les densités les plus élevées est de prendre en compte l'inhomogénéité microscopique due aux ions.

De nombreux essais ont été tentés afin d'obtenir une fonction diélectrique $\varepsilon(q,\omega)$ des électrons qui tienne compte de la présence des ions. Le premier pas dans ce sens est de procéder comme au chapitre VI. Des modèles simples ont été proposés [16], où les ions sont supposés immobiles et distribués suivant leur fonction de corrélation. Malheureusement tous ces modèles se heurtent à des difficultés numériques qui rendent pratiquement impossible l'intégration de $\varepsilon(q,\omega)$ dans la formule donnant $\frac{dE}{dx}$.

La solution plus simple qui a alors été proposée (More dans [17]) est de prendre $\varepsilon(q,\omega)$ d'un fluide d'électrons homogène, puis de moyenner le pouvoir d'arrêt suivant le profil de densité autour d'un ion :



$$Z_i \overline{f} = \int_0^R d^3r \; f\Big(n(r)\Big) \times n(r)$$

Cette technique est spécialement praticable pour un plasma dense d'éléments lourds, où des modes collectifs du fluide électronique peuvent se développer à l'intérieur d'un "atome".

La détermination de n(r) pour un plasma dense peut se faire à l'aide de la théorie développée par Hohenberg et Kohn [18]

qui, contrairement au modèle de Thoma-Fermi simple, donne une densité finie au niveau de l'ion. Le calcul devient ici faisable puisque on utilise $\frac{dE}{dx}$ d'un fluide d'électrons homogène. Les calculs restent néanmoins assez longs dans le cas général car il faut passer par une résolution numérique d'une équation non linéaire du quatrième ordre [19].

L'autre amélioration à apporter lorsque αrs n'est plus très petit, consiste à calculer $\varepsilon(q,\omega)$ au delà de l'A.P.A.. De nombreuses propositions ont été faites, la plupart consacrées au cas où $T_e << 1$ (applications au solide à température ambiante), les seuls calculs faits à q et à ω quelconques donnent une fonction diélectrique beaucoup trop difficile à manipuler pour l'intégrer dans $\frac{dE}{dx}$.

En conclusion nous pouvons affirmer qu'actuellement le freinage d'un ion incident par des électrons du plasma, à l'aide de l'expression (2.1), est donné, de façon la plus générale et la plus précise, en utilisant $\varepsilon(q,\omega)_{A.P.A.}$ en prenant en compte (ou non) l'écrantage par les ions, suivant l'énergie de l'ion incident.

* *
*

APPENDICE A

DETERMINATION DU TERME DOMINANT DANS LE DEVELOPPEMENT DE 1(V)

L'astuce du calcul qui a été fait par Lindhard lorsque $T_e = 0$ est de montrer que :

$$\lim_{v\to\infty}\left\{\left(\int_0^\infty dz \int_0^{\frac{v}{v_F}} \frac{z^3 u\chi^2 f_2(z,u)\,du}{[z^2+\chi^2 f_1(z,u)]^2+[\chi^2 f_2(z,u)]^2}\right) - \left(\int_0^\infty udu \int_{z_r\left(\frac{v}{v_F}\right)}^{\frac{v}{v_F}} \frac{z^3\chi^2 f_2(z,u)\,dz}{[z^2+\chi^2 f_1(z,u)]^2+[\chi^2 f_2(z,u)]^2}\right)\right\} = 0 \quad (A.1)$$

et ensuite d'utiliser la règle de somme connue :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \omega d\omega\ \mathrm{Im}\left(1/\varepsilon(q,\omega)\right) = \omega_p^2 \quad (A.2)$$

L'égalité (A.1) peut s'écrire :

$$\lim_{v\to\infty}(A_1 + A_2 - A_3) = 0 \quad (A.3)$$

$$A_1 = \int_0^{z_r\left(\frac{v}{v_F}\right)} dz \int_0^{\frac{v}{v_F}} du\ F(z,u)$$

$$A_2 = \int_{\frac{v}{v_F}}^{\infty} dz \int_0^{\frac{v}{v_F}} du\ F(z,u)$$

$$A_3 = \int_{z_r(\frac{v}{v_F})}^{\frac{v}{v_F}} dz \int_{\frac{v}{v_F}}^{\infty} du\ F(z,u)$$

$F(z,u)$ étant l'intégrant.

Pour A_2 nous avons déjà vu que $F(z,u) \neq 0$ lorsque : $|z-u| \leq 2a_o(T_e)$, nous pouvons donc écrire :

$$A_2 = \int_{\frac{v}{v_F}}^{\frac{v}{v_F}+10a_o(T_e)} dz \int_{-10a_o(T_e)+\frac{v}{v_F}}^{\frac{v}{v_F}} udu \times \frac{\pi T_e \chi^2}{8z^2} \operatorname{Log}\left[1 + e^{\frac{\gamma-(z-u)^2}{T_e}}\right]$$

$$A_2 < \frac{\pi T_e \chi^2}{8} \int_{\frac{v}{v_F}}^{\frac{v}{v_F}+10a_o(T_e)} \frac{dz}{z^2} \int_{\frac{v}{v_F}-10a_o(T_e)}^{\frac{v}{v_F}} udu$$

$$A_2 < \frac{\pi T_e \chi^2}{8} \times \frac{[10a_o(T_e)]^2}{\left(\frac{v}{v_F}\right)}$$

donc $A_2 \to 0$ quand $\frac{v}{v_F} \to \infty$.

* Pour A_1 : Prenons tout d'abord A_1' où $\frac{v}{v_F}$ est remplacé par $(1 - 100\ z_r)\frac{v}{v_F}$ pour éviter ainsi la résonance à $z_r(\frac{v}{v_F})$.

Dans ce cas, avec la même remarque que plus haut, nous obtenons :

$$A_1' = \int_o^{z_r(\frac{v}{v_F})} dz \int_o^{10a_o(T_e)} F(z,u)$$

et quand $\frac{v}{v_F} \to \infty$, $z_r(\frac{v}{v_F}) \to 0$ ainsi que $F(z,u)$.

En conséquence le domaine d'intégration et l'intégrant tendent vers 0 lorsque $v \to \infty$.

Il faut ensuite rajouter la contribution de la résonance, celle-ci est < à

$$\int_{o}^{a_o(T_e)/10} dz \int_{(1-100z_r)\frac{v}{v_F}}^{\frac{v}{v_F}} du\, F(z,u)$$

Nous avons déjà constaté que ce terme est proportionnel à

$$\text{Log} \frac{\frac{v}{v_F}}{\frac{v}{v_R}(1 - 100\ z_r)} \simeq 100\ z_r \to 0 \quad \text{quand } \frac{v}{v_F} \to \infty$$

Donc : $A_1 \to 0$

$v \to \infty$

* Pour A_3 : Nous faisons de même en remplaçant A_3 par A_3' pour l'intégration sur les u

$$A_3' = \int_{\frac{v}{v_F} - 10a_o(T_e)}^{\frac{v}{v_F}} dz \int_{\frac{v}{v_F}}^{\frac{v}{v_F} + 10a_o(T_e)} du\, F(z,u)$$

La surface d'intégration est constante et la valeur maximale de $F(z,u)$ dans ce domaine tend vers 0 comme $\frac{1}{v}$ donc $A_3' \to 0$

$v \to \infty$

et pour le terme résonnant le calcul est semblable à celui pour A_1 et ainsi : $A_3 \to 0$

$v \to \infty$

Finalement, l'égalité (A.3) est démontrée et en utilisant (A.2) nous obtenons :

$$L(v) = \frac{6}{\pi\chi^2} \int_{z_r(\frac{v}{v_F})}^{\frac{v}{v_F}} dz \int_0^{\infty} \frac{z^3 u du \chi^2 f_2(z,u) du}{[z^2+\chi^2 f_1(z,u)]^2+[\chi^2 f_2(z,u)]^2}$$

Soit $L(v) = \text{Log} \frac{2mv^2}{\hbar\omega_p}$ qui est le résultat reporté dans (4.11).

* *
*

CHAPITRE VIII

FREINAGE D'UN ION A GRANDE DISTANCE PAR LES ELECTRONS LIES D'UN ATOME

VIII.1. INTRODUCTION

Considérons un ion de charge Ze, vitesse v, masse M qui pénètre dans une cible composée d'atomes de dentisé n_a^i, nombre atomique Z_a^i et d'électrons libres de densité n_e. Suivant la densité et la température nous pouvons déterminer par différentes méthodes (équation de Thoma-Fermi à faible température et grande densité et équation de Saha à faible densité et grande température) la composition de la cible en atomes neutres et en différentes espèces d'ions. Nous allons supposer ici que le milieu n'est ni trop dense ni trop chaud pour pouvoir éliminer l'effet d'écrantage des électrons libres (et donc également des ions) sur les électrons liés à un atome ou un ion. Le pouvoir d'arrêt s'obtient alors, comme nous l'avons indiqué dans l'introduction générale, simplement par la somme des différentes contributions :

$$\frac{dE}{dx} = \sum_i \alpha_i + \sum_i \beta_i + \gamma$$

VIII.2. EXPRESSION DU FREINAGE PAR UN OSCILLATEUR

Nous allons nous intéresser à la détermination de β_i et plus particulièrement à sa contribution chocs lointains.

Considérons donc notre ion incident qui traverse une "cible" composée d'atomes ou ions d'espèces i, de densité n_i, ayant

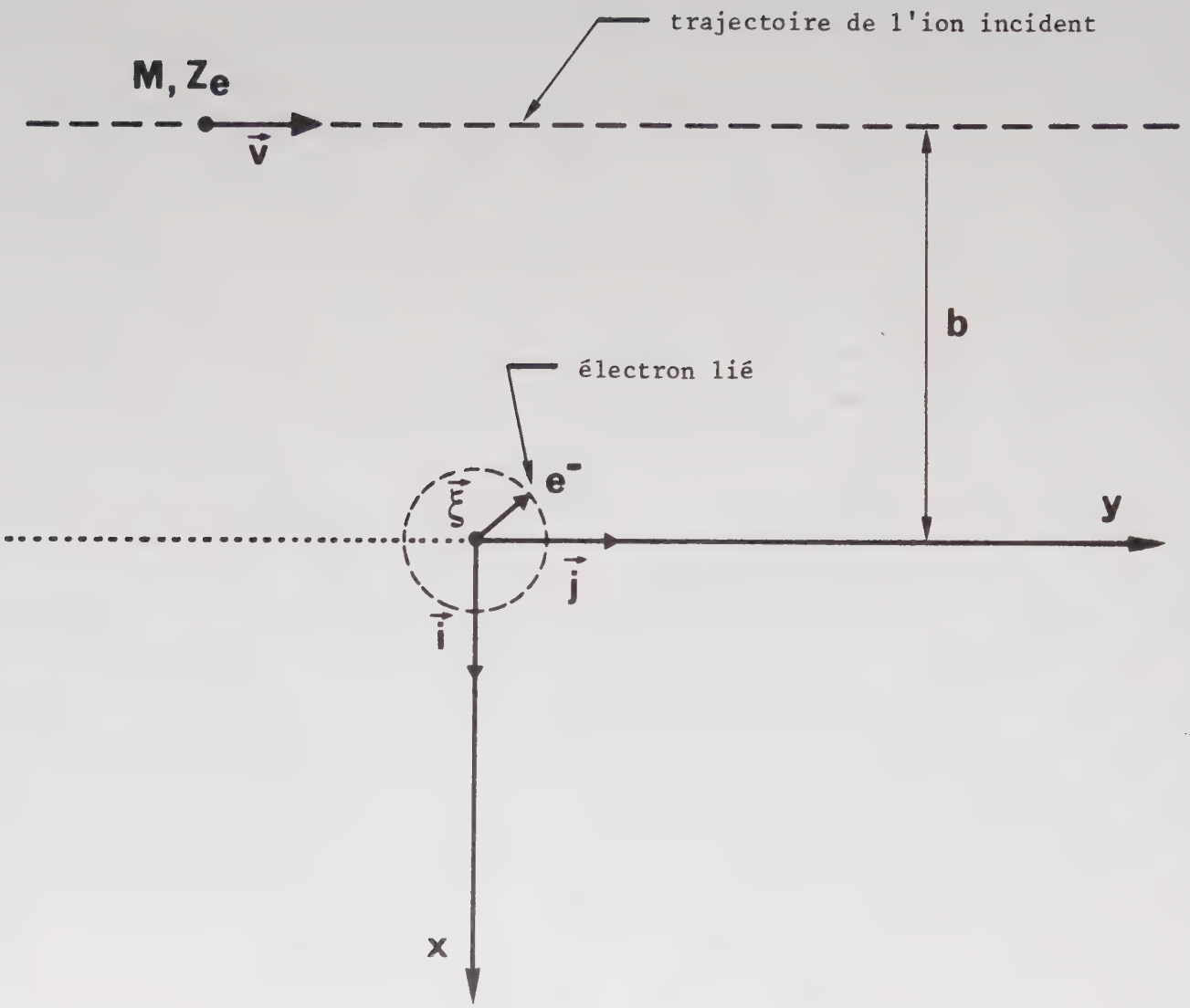


FIGURE 8.0

Schéma de l'interaction ion incident - électron lié.
$\vec{\xi}$ est le déplacement de e^- par rapport à sa position d'équilibre

Z_i électrons liés par atome. L'ion passant loin de ces atomes, on peut supposer valable l'approximation dipolaire. Nous allons indiquer ici la théorie classique de l'interaction [20], la théorie quantique donne un résultat identique, à l'approximation de l'oscillateur harmonique. L'effet de l'ion sur un électron lié va donc se ramener à celui du champ électrique variable sur un oscillateur harmonique.

Le schéma d'interaction est reporté figure (8.0).

Soit f(t,b) la force agissant sur l'électron, nous avons :

$$\ddot{\vec{\xi}} + \omega^2 \vec{\xi} = \vec{f}(t,b)/m_e$$

avec comme solution théorique :

$$\vec{\xi}(t) = \text{Réel}\ \frac{i}{m_e \omega} \int_{-\infty}^{t} \vec{f}(t',b) e^{-i\omega(t-t')} dt' \qquad (8.1)$$

L'énergie acquise par l'électron au temps t est :

$$\frac{1}{2} m(\dot{\xi}^2 + \omega^2 \xi^2) = W_r(t,b)$$

avec :

$$W_r(t,b) = \frac{1}{2m_e} \left| \int_{-\infty}^{t} f(t',b) e^{i\omega t'} dt' \right|^2 \qquad (8.2)$$

Donc si l'on considère qu'il y a dans l'atome Fω oscillateurs à la fréquence ω, le pouvoir d'arrêt à cette fréquence s'écrit :

$$\left(\frac{dE^i}{dx}\right)_\omega = -2\pi n_i Z_i F\omega \int_{a\omega}^{\infty} b\,db\,W_r(\infty,b) \qquad (8.3)$$

aω étant la distance minimale à laquelle l'approximation dipolaire n'est plus valable.

VIII.3. CALCUL DE $\left(\frac{dE^i}{dx}\right)_\omega$

$$\vec{f}(t,b) = -\frac{Ze^2[b + \xi_x(t)]\vec{i} - [vt - \xi_y(t)]\vec{j}}{\left\{[b+\xi_x(t)]^2 + [vt-\xi_y(t)]^2\right\}^{3/2}}$$

En supposant, puisque l'échange d'énergie est faible, que

$$\xi(t) \Big/ (b^2 + v^2t^2)^{1/2} << 1$$

et en développant au premier ordre par rapport à cet infiniment petit, on obtient :

$$\vec{f}(t,b) = \vec{f}_o(t,b) + \Delta\vec{f}(t,b)$$

$$\vec{f}_o(t,b) = -Ze^2(b\vec{i} - vt\vec{j}) \Big/ \left(b^2 + (vt)^2\right)^{3/2}$$

$$\Delta\vec{f}(t,b) = -Ze^2\left\{\left[(-2b^2+v^2t^2)\xi_x(t) + 3bvt\xi_y(t)\right]\vec{i}\right.$$
$$\left. + \left[(b^2-2v^2t^2)\xi_y(t) + 3bvt\xi_x(t)\right]\vec{j}\right\} \Big/ (b^2+v^2t^2)^{5/2}$$

Δf au premier ordre est donné par une itération en remplaçant $\vec{\xi}$ par la formule (8.1), $f(t',b)$ étant remplacé par $f^o(t',b)$.

Ceci nous donne :

$$\left(\frac{dE^i}{dx}\right)^o_\omega = -2\pi n_i Z_i F\omega \int_{a_\omega}^{\infty} bdb(W_1 + W_2)$$

$$W_1 = \frac{1}{2m}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{be^{i\omega t}dt}{(b^2+v^2t^2)^{3/2}}\right\}^2 = \frac{1}{2m} \times \frac{1}{b^2v^2}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\frac{i\omega b}{v}}dx}{(1+x^2)^{3/2}}\right\}^2$$

Soit $$W_1 = \frac{Z^2e^4}{(4\pi\varepsilon_o)^2 \times 2m} \times \frac{1}{b^2v^2} K_1^2\left(\frac{b}{v}\omega\right)$$

$K_1(x)$ étant la fonction de Bessel de seconde espèce d'ordre 1 et $K_o(x)$ celle d'ordre 0 (voir appendice B).

De même : $$W_2 = \frac{1}{2m} \times \frac{1}{b^2 v^2} \times K_o^2\left(\frac{b}{v}\omega\right) \times \frac{Z^2 e^4}{(4\pi\varepsilon_o)^2}$$

D'où :

$$\left(\frac{dE^i}{dx}\right)^o_\omega = - \frac{2\pi n_i Z_i F_\omega Z^2 e^4}{(4\pi\varepsilon_o)^2 . 2mv^2} \times \int_{a_\omega}^{\infty} b^{-1} db \left\{K_o^2\left(\frac{b}{v}\omega\right) + K_1^2\left(\frac{b}{v}\omega\right)\right\} \quad (8.4)$$

et $$\Delta\left(\frac{dE^i}{dx}\right)^o = - \frac{4\pi n_i Z_i \omega F_\omega}{m^2 v^5}\left(\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_o}\right)^3 \times I\left(\frac{\omega a_\omega}{v}\right)$$

avec :

$$I(\xi) = \int_\xi^\infty \frac{du}{u^2} \times \left\{-K_1(u) \int_{-\infty}^{+\infty} dv \frac{\cos uv}{(1+v^2)^{5/2}}\left[(v^2-2)F_1(u,v) - 3vF_2(u,v)\right] + K_o(u) \int_{-\infty}^{+\infty} dv \frac{\sin uv}{(1+v^2)^{5/2}}\left[3vF_1(u,v) - (1-2v^2)F_2(u,v)\right]\right\}$$

et $$F_1(u,v) = \int_{-\infty}^{v} dy \frac{\sin[u(v-y)]}{(1+y^2)^{3/2}}$$

$$F_2(u,v) = \int_{-\infty}^{v} dy \frac{y \sin[u(v-y)]}{(1+y^2)^{3/2}}$$

On voit que cette fonction n'est pas d'un maniement très aisé puisqu'elle se compose d'une intégrale triple faisant en plus intervenir des fonctions spéciales.

Il se trouve que des intégrales très semblables comme :

$$J(z,z') = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx\, e^{iZx}}{(1+x^2)^{3/2}} \int_{-\infty}^{x} dy \frac{e^{-iZ'y}}{(1+y^2)^{3/2}}$$

et $$M(z,z') = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{e^{izx}}{(1+x^2)^{5/2}} \int_{-\infty}^{x} dy \frac{e^{-iz'y}}{(1+y^2)^{5/2}}$$

ont déjà été réduites en produit de fonctions spéciales [25]. Toutes les intégrales qui contribuent à $I(\xi)$ peuvent s'exprimer à l'aide de $J(z,z')$, $M(z,z')$ et de leurs dérivées. Le calcul fait dans l'appendice (C) donne :

$$I(\xi) = 2\pi\left[\xi K_1(2\xi)\left(K_o(\xi)I_o(\xi) - K_1(\xi)I_1(\xi)\right) + \int_{\xi}^{\infty} K_1(2U)K_1(u)I_1(u)\,du\right] \qquad (8.5)$$

$I(\xi)$ écrite ainsi devient beaucoup plus praticable et rapidement calculable à l'aide des bibliothèques mathématiques des centres de calcul.

* Limite de $I(\xi)$ lorsque $\xi \to 0$

A l'aide des développements de l'appendice B on trouve :

$$I(\xi) = -\frac{3}{2}\pi \text{Log } \xi - 2{,}417 - 2\pi\xi^2\left[(\text{Log } \xi)^2 + 1{,}14(\text{Log } \xi) - 0{,}33\right] \qquad (8.6)$$

qui améliore le résultat de la référence [20] qui donne :

$$I(\xi) = -\frac{3}{2}\pi \text{Log } \xi - 2{,}4$$

* Limite de $I(\xi)$ lorsque $\xi \to \infty$

$$I(\xi) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{\xi}\right)^{3/2} e^{-2\xi} \qquad (8.7)$$

qui n'est pas celui donné par [20] qui donne $I(\xi) = \left(\frac{4\pi}{\xi^2}\right)e^{-2\xi}$

Pour obtenir le pouvoir d'arrêt total, il nous faut maintenant sommer $\left(\frac{dE^i}{dx}\right)_\omega^o$ et $\Delta\left(\frac{dE^i}{dx}\right)_\omega$ sur les fréquences d'oscillateurs de l'atome.

VIII.4. SOMME SUR LES OSCILLATEURS

Soit $g(\omega)$ la force d'oscillateur différentielle de l'atome, normalisée à 1 :

$$\int_0^\infty g(\omega)\,d\omega = 1, \quad \text{et} \quad F_\omega = g(\omega)\,d\omega$$

La distribution $g(\omega)$ peut se déterminer dans deux cas extrêmes.

* Modèle de l'électron indépendant

Nous partons d'un modèle statistique du fluide d'électrons liés. L'atome étant supposé sphérique, à une distance r du noyau il y a une densité n(r) d'électrons et un potentiel électrostatique V(r) qui seront donnés plus loin. Si nous nous plaçons dans le modèle où chaque électron tourne autour du noyau, indépendamment des autres électrons, dans une trajectoire circulaire, la mécanique classique nous donne :

$$\omega_{hy}^2(r) = -\left(\frac{1}{mr}\right)\frac{dV(r)}{dr}$$

$\omega_{hy}(r)$ étant la fréquence angulaire des électrons à la distance r. Nous obtenons ainsi :

$$g_{hy}(\omega) = \frac{1}{Z_i}\int d^3r\ \rho(r)\ \delta\left(\omega_{hy}(r) - \omega\right)$$

* Modèle du gaz homogène

Dans ce modèle on considère, au contraire du précédent, qu'entre r et r + dr les électrons forment un gaz de densité uniforme ayant un mode plasma à la fréquence :

$$\omega_p(r)\ ,\quad \left(\omega_p^2(r) = \frac{n(r)e^2}{m\varepsilon_o}\right)$$

et ainsi une distribution associée :

$$g_p(\omega) = \frac{1}{Z_i} \int d^3r\ \rho(r).\delta\left(\omega_p(r) - \omega\right)$$

La réalité se trouve à mi-chemin entre ces deux modèles. Lindhard [24] a décrit la seule manière existant jusqu'à maintenant de tenir compte de ces deux effets. Remarquant, tout d'abord que $\omega_{hy}^2(r) \simeq \omega_p^2(r)$ et qu'ensuite la force appliquée par l'ion s'exprime de façon identique en fonction de Log ω_{hy}^2 ou de Log ω_p^2, il a proposé $\omega_o^2(r) = 2\omega_p^2(r)$.

Ceci conduit à :

$$g(\omega) = \frac{1}{Z_i} \int d^3r\ \rho(r)\delta\left(\omega_o(r) - \omega\right) \qquad (8.8)$$

avec soit $\omega_o(r) = \sqrt{\omega_{hy}^2(r) + \omega_p^2(r)}$

soit $\omega_o(r) = \sqrt{2}\ \omega_p(r)$

ces deux fréquences $\omega_o(r)$ donnent pratiquement le même résultat pour $\left(\frac{dE^i}{dx}\right)^o$ et $\Delta\left(\frac{dE^i}{dx}\right)$. Dans les calculs qui suivent nous avons pris :

$$\omega_o(r) = \sqrt{\omega_{hy}^2(r) + \omega_p^2(r)}$$

Finalement :

$$\left(\frac{dE^i}{dx}\right)^o = \int_o^\infty g(\omega)d\omega.\frac{2\pi n_i Z_i Z^2 e^4}{(4\pi\varepsilon_o)^2.2mv^2} \times \int_{a_\omega}^\infty \frac{db}{b}\left\{K_o^2\left(\frac{b\omega}{v}\right) + K_1^2\left(\frac{b\omega}{v}\right)\right\}$$

Dans la détermination de a_ω nous adoptons la limite de Jackson et McCarthy [21] qui prennent comme limite d'intégration des chocs lointains l'amplitude d'oscillation d'un oscillateur d'énergie $\hbar\omega_o$.

Soit $a_\omega = \left[\hbar/\left(2m\omega_o(r)\right)\right]^{1/2}$

On obtient alors :

$$\left(\frac{dE^i}{dx}\right)^o = \frac{4\pi n_i Z_i e^4 Z^2}{(4\pi\varepsilon_o)^2 mv^2} \times \int_o d^3r\rho(r) \times \int_\xi^\infty x\left[K_1^2(x)+K_o^2(x)\right]dx \quad (8.9)$$

$$\text{avec } \xi = (\hbar\omega_o/2mv^2)^{1/2}$$

et $$\Delta\left(\frac{dE^i}{d\omega}\right) = \frac{4\pi n_i Z_i e^4 Z^3}{(4\pi\varepsilon_o)^2 \times mv^2} \times \frac{2}{\sqrt{Z_i}} \times \frac{1}{V} \times \int d^3r\rho(r)\xi^2 I(\xi) \quad (8.10)$$

$$\text{où } V = \frac{v}{\sqrt{Z_i} v_o}, \qquad v_o = \frac{e^2}{\hbar} = \frac{c}{137}$$

VIII.5. MODELE STATISTIQUE DE L'ATOME

Il nous reste maintenant à expliciter le potentiel V(r) pour avoir ω_o^2 (r) et $\rho(r)$. Le modèle, jusqu'à présent le plus utilisé pour ce genre de calcul est le modèle de Lenz-Jensen qui s'applique assez bien aux atomes lourds. Ce modèle donne :

$$\rho(r) = \frac{1}{A}\frac{e^{-x}}{x^3}\left(\sum_{i=0}^{n} C_i x^i\right)^3$$

A étant la constante de normalisation,

$$x = \left(\frac{r\lambda}{a_o}\right)^{1/2} Z_i^{1/3}$$

λ et C_i paramètres. Par exemple, pour un atome neutre et pour n = 1 :

$$\lambda = 10{,}91, \qquad C_1 = 0{,}265$$

Comme l'a remarqué Jackson [21] l'échelle de distance pour $\rho(r)$ variant comme $(\frac{1}{Z})^{1/3}$, $\rho(r)$ varie comme Z et également $\omega_p(r)$.

Il s'ensuit que, en notant

$$\left(\frac{dE}{dx}\right)_d = Z^2 I_d + Z^3 J_d \quad \text{on obtient} \quad J_d/2I_d = F(v)/\sqrt{Z} \tag{8.11}$$

où F(v) devient une fonction indépendante de l'atome considéré.

En 1969 Green, Sellinz et Zachor ont introduit un nouveau potentiel V(r) appelé potentiel G.S.Z., lequel avec deux paramètres seulement ajuste beaucoup mieux le modèle à chaque élément de la table de Mendeleiev en faisant varier ces paramètres pour obtenir les premiers niveaux d'énergie d'un atome (ion) quelconque [22].

Le potentiel ressentit en r par un électron est alors donné par V(r) G.S.Z. qui fait explicitement intervenir le cortège des électrons résiduels, sous la forme :

$$V(r) = \frac{2}{r}\left[N\gamma(r) - Z_i\right] \tag{8.12}$$

Z_i = charge de l'ion, N = nombre d'électrons liés - 1

avec $\gamma(r) = 1 - \Omega(r) = \frac{HY}{HY + 1}$, $Y = e^y - 1$

$y = \frac{r}{d}$, d et H paramètres ajustables ($H \simeq d \times N^{0,4}$).

On voit que ce potentiel ne rajoute aucune complication de calcul par rapport au modèle Lenz-Jensen.

En utilisant ce modèle G.S.Z. la fonction F(v) définie par Jackson ne demeure plus indépendante de l'atome. $\rho(r)$ est alors donné à l'aide de l'équation de Poisson :

$$4\pi r^2 \rho(r) = \frac{y}{d} \frac{He^y}{(HY+1)^2} \left(-1 + \frac{2He^y}{(HY+1)}\right) \tag{8.13}$$

VIII.6. RESULTATS

Nous pouvons, pour les chocs lointains, mettre les résultats sous la forme :

$$-\left(\frac{dE}{dx}\right)_d = Z^2 I_d + Z^3 J_d$$

$$I_d = \frac{C}{v^2}\int d^3r\rho(r) \times \int_{\xi}^{\infty} x\left(K_1^2(x) + K_o^2(x)\right)dx \qquad (8.14)$$

$C = \dfrac{4\pi n_i Z_i e^4}{(4\pi\varepsilon_o)^2 m}$, et $\left[\int_{\xi}^{\infty} x\left(K_1^2(x) + K_o^2(x)\right)dx\right]$ se réduit à $\xi K_o(\xi)K_1(\xi)$.

A grande vitesse, nous avons $\xi << 1$ dans la plus grande partie intéressant l'intégrale. Nous pouvons donc développer l'intégrant avec le résultat :

$$\xi K_o(\xi)K_1(\xi) \simeq -\left(\text{Log}\,\frac{\xi}{2} + \gamma_E\right) - \frac{\xi^2}{2}\left(\text{Log}\,\frac{\xi}{2} + \gamma_E - \frac{1}{2}\right)$$

γ_E = constante d'Euler = 0,577216.

Le terme principal donne alors :

$$I_d = -\frac{C}{v^2}\int d^3r\rho(r)\ \text{Log}\ \xi$$

Soit :

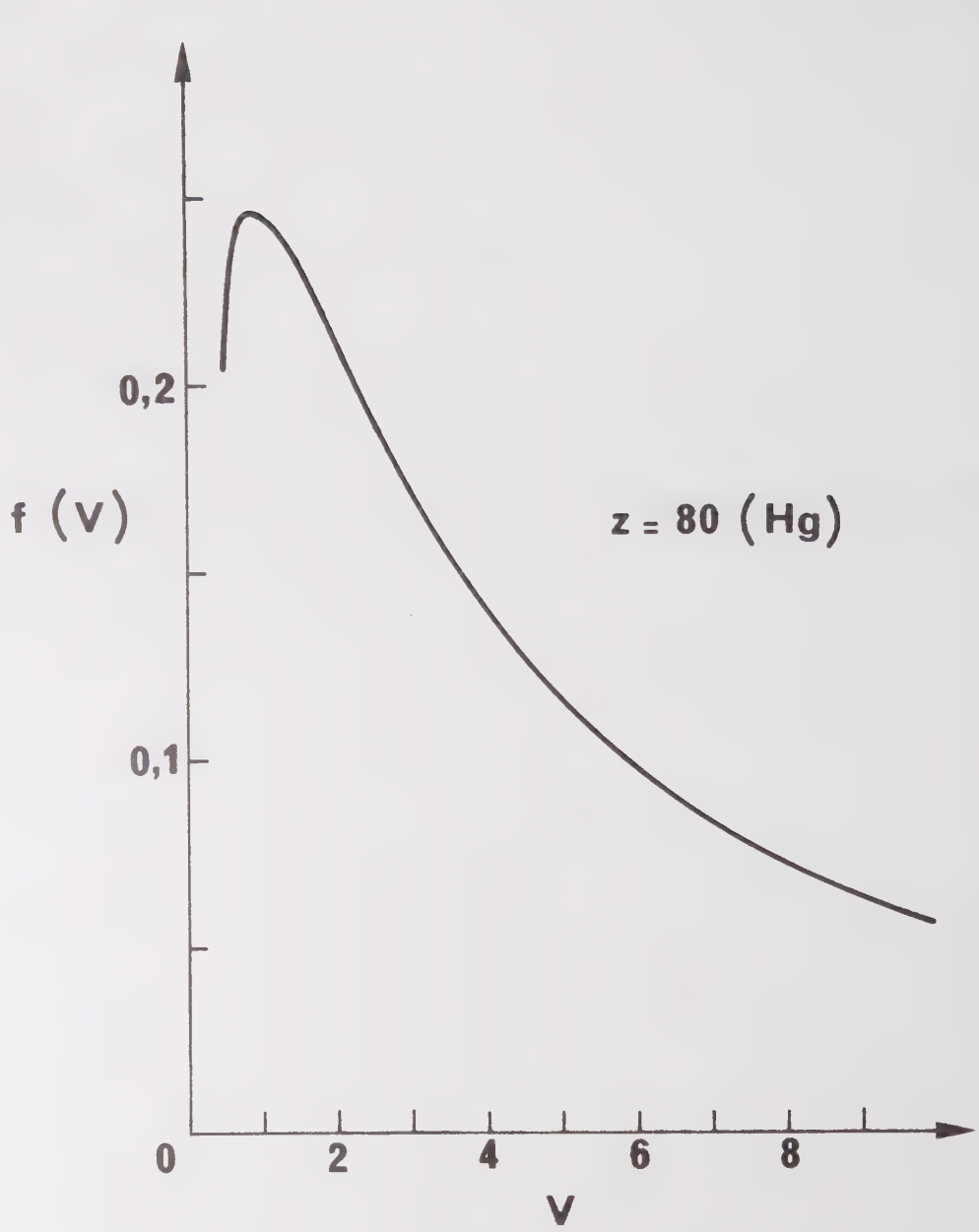
$$I_d = \frac{C}{2v^2}\ \text{Log}\ \frac{2mv^2(1,123)^2}{\bar{I}} \qquad (8.15)$$

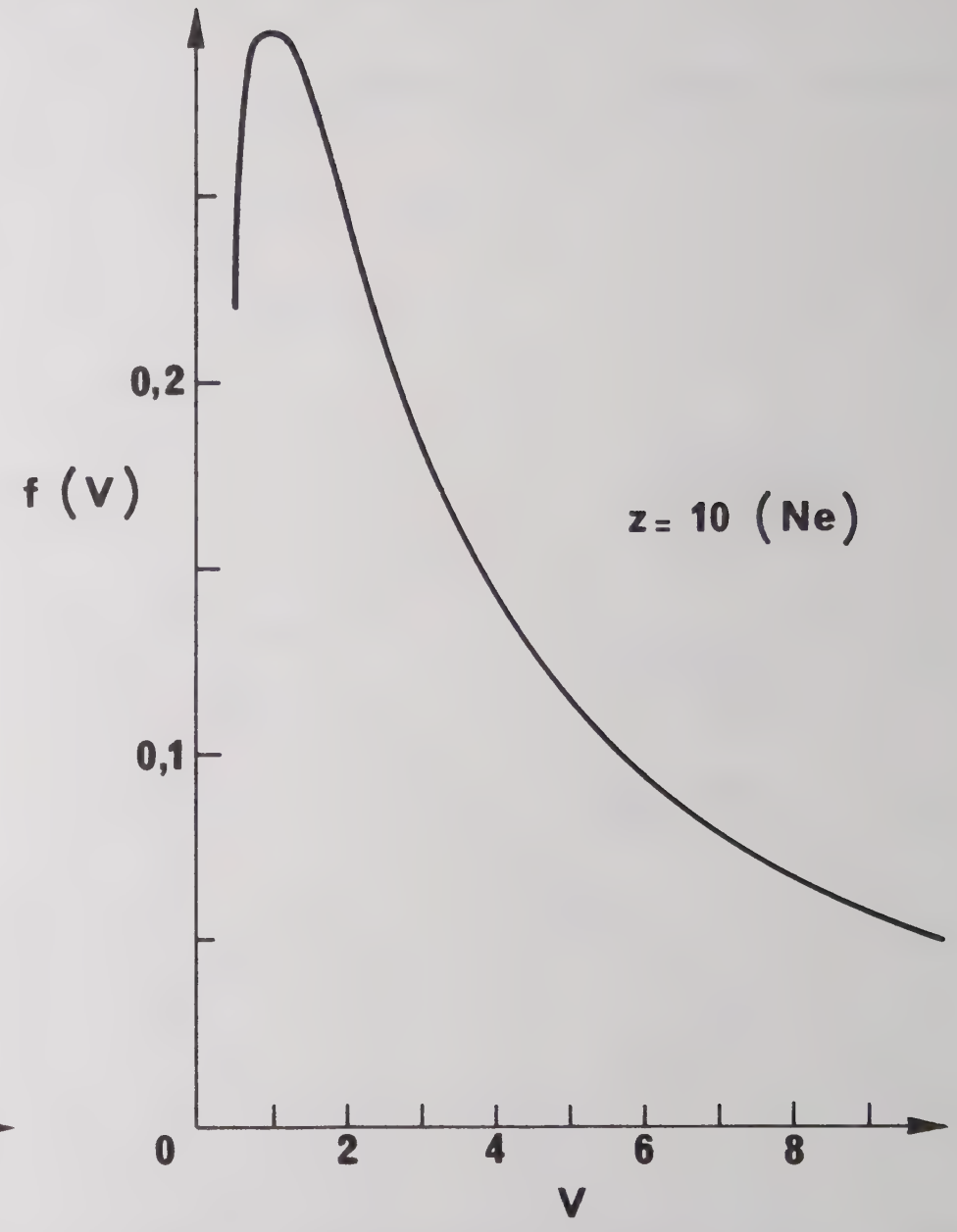
(Log 1,123 = Log 2 - γ_E)

$\bar{I}$ est le potentiel moyen d'ionisation défini par :

$$\text{Log}(\bar{I}) = \int d\omega g(\omega)\ \text{Log}\ (\hbar\omega) \qquad (8.16)$$

Soit $$\text{Log}(\bar{I}) = \int d^3r\rho(r)\ \text{Log}\left(\hbar\omega_o(r)\right)$$





$f(V) = \int d^3r \rho(r) \xi^2 I(\xi)$ en fonction de $V = \frac{v}{\sqrt{Z} v_o}$ pour Hg et pour Ne

FIGURE 8.1

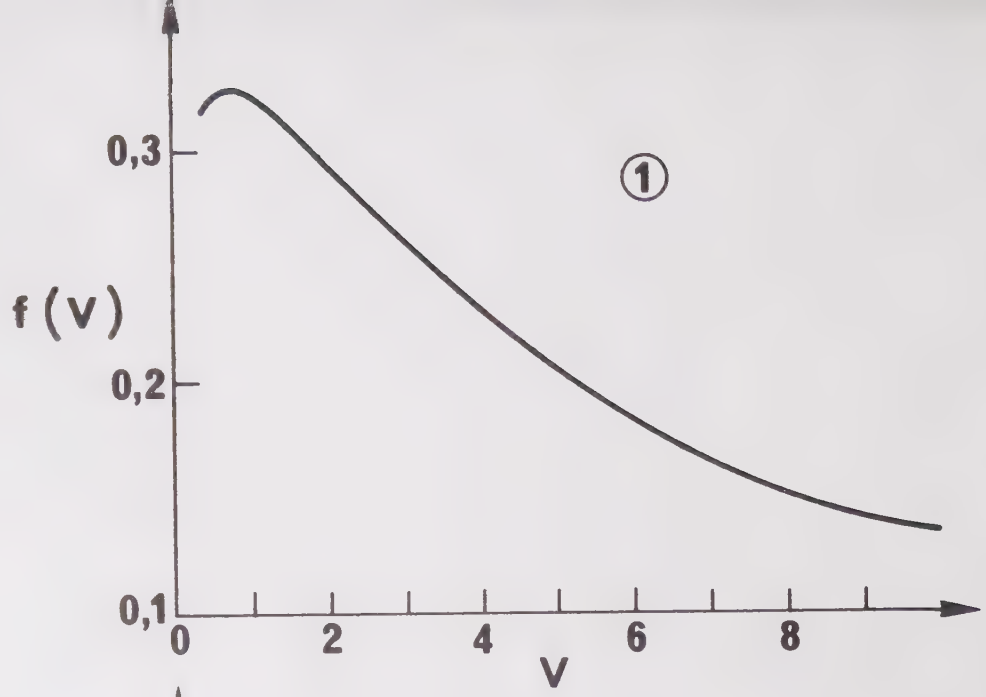
$$f(V) = \sqrt{Z} \times V^2 J_d(V) / 2 I_d(V)$$

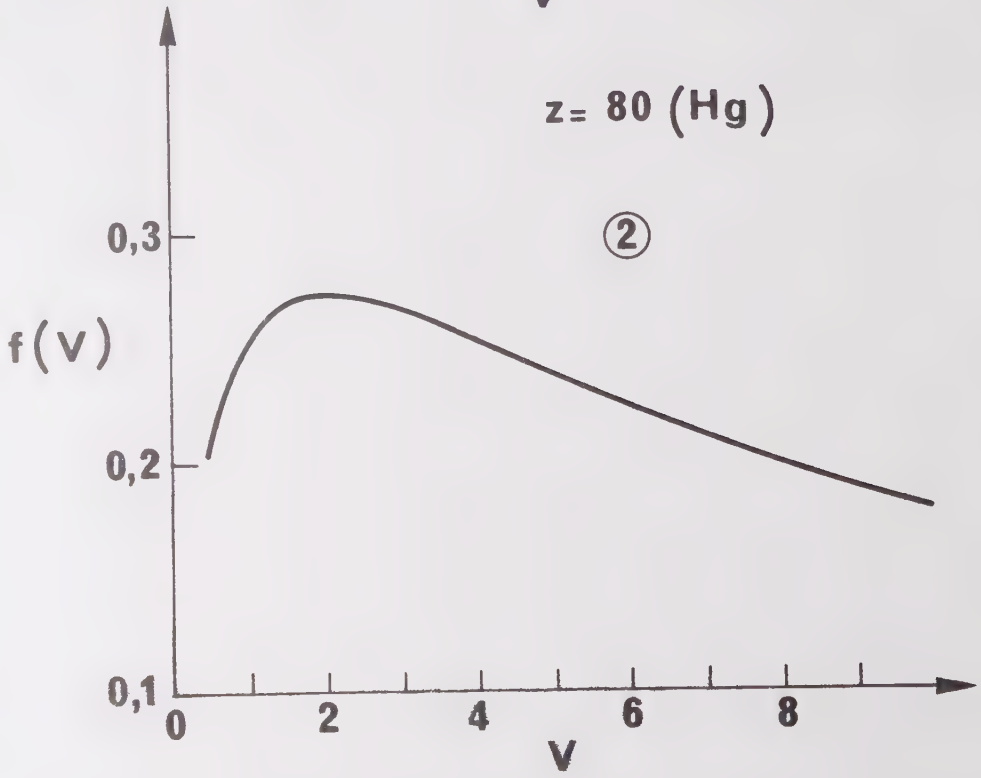
① Résultats de J.D.Jackson et L.Mc Carthy

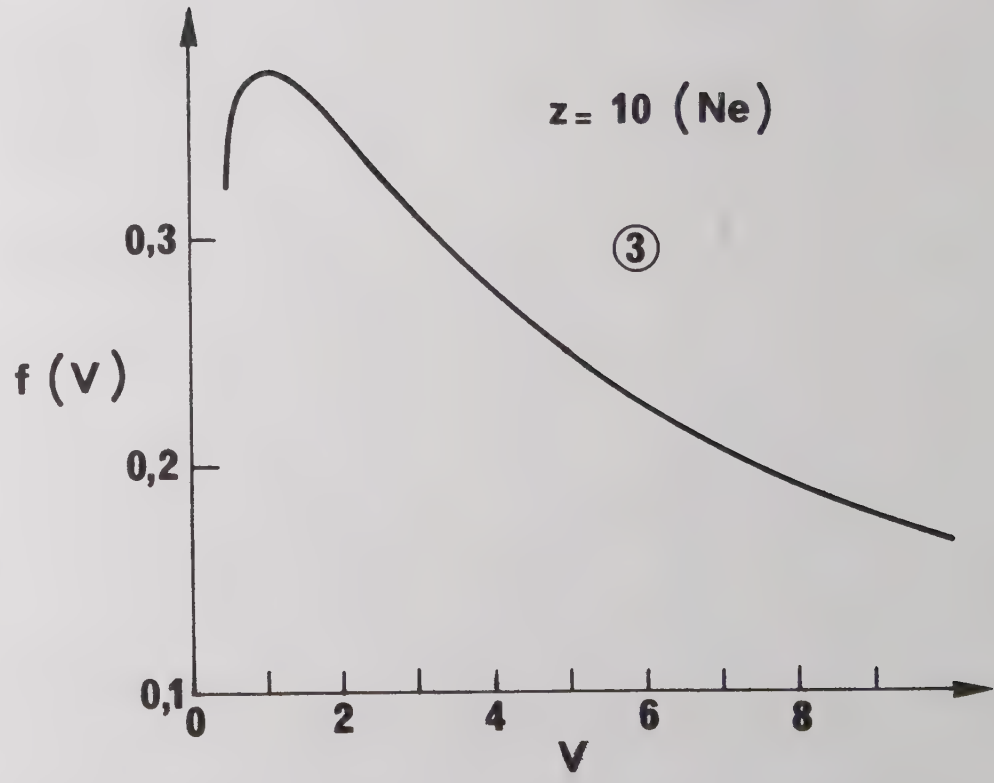
② Hg G.S.Z.

③ Ne G.S.Z.

FIGURE 8.2







Dans le modèle Lenz-Jensen, on pose $\bar{I} = K_o * Z_i$, K_o est une constante indépendante de Z_i qui vaut 10,7 eV. Par contre le modèle G.S.Z. introduit une variation de K_o qui devient $K_o(Z)$. En particulier, pour les faibles valeurs de Z_i, G.S.Z. donnent de meilleurs résultats que L.J..

Nous avons reporté sur le tableau (6) les valeurs de $\bar{I}$ et K_o obtenues avec G.S.Z. en utilisant les paramètres d et H de la référence [23].

Remarquons que notre objectif n'est pas ici de donner $\bar{I}$ avec le maximum de précision. Ceci ne peut se faire dans le cadre d'un modèle simple comme G.S.Z.. En particulier, pour améliorer le résultat, il faudrait tenir compte des corrections dues aux couches profondes de l'atome. Notre but est ici de calculer un terme en Z^3 suffisamment précis grâce à G.S.Z. ($\bar{I}$ entrant dans un log la précision sur $\frac{dE}{dx}$ est peu sensible à $\bar{I}$) et beaucoup plus rapidement que cela n'était possible auparavant grâce au calcul de $I(\xi)$.

L'expression (8.15) pour I_d est une limite grande vitesse, on voit d'ailleurs que pour $2mv^2 < \bar{I}$ l'expression devient négative alors que l'égalité (8.14) donne bien I_d toujours positif. A vitesse plus faible, il y a lieu de prendre I_d sous sa forme générale. Ce modèle n'est tout de même bien applicable que pour des vitesses incidentes supérieures aux vitesses atomiques. De plus nous avons déjà remarqué en étudiant les électrons libres que l'on ne peut séparer la contribution des chocs proches de celle des chocs lointains uniquement dans la limite $v >> v_{THe}$.

Sur la figure (8.1) nous avons reporté les résultats pour J_d :

$$J_d = \frac{C}{v^2} \frac{2}{\sqrt{Z_i}} \times \frac{1}{V} \int d^3r \rho(r) \xi^2 I(\xi)$$

et sur la figure (8.2) nous montrons différentes valeurs de F(v) qui sont comparées au calcul de Jackson. Nos valeurs sont proches des siennes avec une légère correction due à la différence entre le modèle G.S.Z. et le modèle L.J..

Z =	10	30	50	70	90
élément :	Ne	Zn	Sn	Yb	Th
$\overline{I}$ (eV)	133,4	320	479	679	801
KO (eV)	13,3	10,65	9,58	9,70	8,90
KO litt(eV)	12,8	10,45	9,76	9,57	9,30

TABLEAU 6

Valeur du potentiel d'ionisation $\overline{I}$ et de KO, défini par $\overline{I}$ = Z.KO, en eV.KO litt. sont des valeurs tabulées dans [28]. Le modèle L.J. donne KO = 10,7 eV. On peut remarquer dans la littérature, de grandes variations dans les valeurs de $\overline{I}$ tabulées.

VIII.7. CONTRIBUTIONS DES CHOCS PROCHES

Pour une distance inférieure à $a_\omega = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_o}}$, l'énergie transférée varie de $\hbar\omega_o$ à $2mv^2$ (choc frontal).

En utilisant la section efficace de Rutherford et en supposant les électrons libres (l'énergie échangée est grande devant l'énergie de liaison) et $v >> v_{el}$ nous obtenons :

$$I_{p\omega} = \frac{C}{2v^2} F_\omega \text{ Log } \frac{2mv^2}{\hbar\omega_o}$$

Il nous reste ensuite à sommer $I_{p\omega}$ sur les fréquences de la même façon que pour $I_{d\omega}$, ce qui donne :

$$I_p = \frac{C}{2v^2} \text{ Log } \frac{2mv^2}{\bar{I}} \quad \text{(Pratiquement } I_p \simeq I_d\text{)}$$

Soit
$$I_{total} = \frac{C}{v^2} \text{ Log } \frac{1,123.2mv^2}{\bar{I}} \tag{8.17}$$

et
$$J_{total} = J_d \tag{8.18}$$

(Les chocs proches ne contribuent pas dans J).

Rappelons que nous ne donnons ici que le calcul élémentaire du terme en Z^2, notre but étant surtout d'expliciter le terme en Z^3 et l'importance relative entre ces deux effets. Pour faire un calcul complet du pouvoir d'arrêt en intégrant le terme en Z^3 il est nécessaire d'ajouter au terme en Z^2, donné ici, les corrections provenant des couches internes. Pour l'effet en Z^3 nous n'avons pas rajouté ces corrections, le terme principal étant déjà une correction par rapport au terme en Z^2.

VIII.8. CONCLUSION DU CHAPITRE

Le pouvoir d'arrêt pouvant s'écrire :

$$-\frac{dE}{dx} = Z^2 I + Z^3 J$$

nous avons simplifié le calcul de J en le mettant sous une forme beaucoup plus compacte que celle existant auparavant. De plus, nous avons utilisé le modèle atomique G.S.Z. qui permet de traiter les éléments légers d'une façon plus satisfaisante que le modèle L.J. habituellement utilisé.

Les calculs ont été explicités dans le cas d'atomes neutres mais peuvent se généraliser immédiatement à des ions de charge quelconque.

L'amélioration du présent calcul passe par une meilleure description de la dynamique des électrons liés et par l'intervention du milieu ambiant, par exemple dans le calcul du potentiel d'ionisation.

* *
*

APPENDICE B

QUELQUES PROPRIETES DES FONCTIONS DE BESSEL $I_\nu(z)$ ET $K_\nu(z)$ [26]

$$I_\nu(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}z\right)^{\nu+2m}}{m!\Gamma(\nu+m+1)} \qquad (\nu \in \mathbb{R}),\ (z \in \mathbb{C})$$

Γ étant la fonction gamma, pour $(n \in \mathbb{N})$ $\Gamma(n) = (n-1)!$.

$$K_\nu(z) = \frac{1}{2}\pi \frac{I_{-\nu}(z) - I_\nu(z)}{\sin \nu\pi}, \quad K_n(z) = \lim_{\nu \to n} K_\nu(z)$$

$$I_o'(z) = I_1(z) \qquad K_o'(z) = -K_1(z)$$

$$I_{-n}(z) = I_n(z) \qquad K_{-\nu}(z) = K_\nu(z)$$

$$ZI_\nu'(z) + \nu I_\nu(z) = ZI_{\nu-1}(z), \qquad ZK_\nu'(z) + \nu K_\nu(z) = -ZK_{\nu-1}(z)$$

$$ZI_\nu'(z) - \nu I_\nu(z) = ZI_{\nu+1}(z), \qquad ZK_\nu'(z) - \nu K_\nu(z) = -ZK_{\nu+1}(z)$$

$$K_\nu(xz) = \frac{\Gamma(\nu+\frac{1}{2}).(2z)^\nu}{x^\nu \Gamma(\frac{1}{2})} \int_o^\infty \frac{\cos xu\, du}{(u^2 + z^2)^{\nu+\frac{1}{2}}}$$

$$K_\nu(z) \underset{z\to\infty}{=} \sqrt{\frac{\pi}{2z}}\, e^{-z}\left[1 + \frac{4\nu^2-1^2}{1!8z} + \frac{(4\nu^2-1^2)(4\nu^2-3^2)}{2!(8z)^2} + \ldots\right].$$

$$I_\nu(z) \underset{z\to\infty}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi z}}\, e^{z}\left[1 - \frac{(4\nu^2-1^2)}{1!8z} + \frac{(4\nu^2-1^2)(4\nu^2-3^2)}{2!(8z)^2} - \ldots\right]$$

$$K_n(z) \underset{z\to 0}{=} \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(-)^m (n-m-1)!}{m!\,(\frac{1}{2}z)^{n-2m}} + (-)^{n+1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2}z)^{n+2m}}{m!\,(n+m)!}$$

$$\times \left\{ \mathrm{Log}(\tfrac{1}{2}z) - \tfrac{1}{2}\psi(m+1) - \tfrac{1}{2}\psi(n+m+1) \right\}$$

$$K_o(z) \underset{z\to 0}{=} -\mathrm{Log}(\tfrac{1}{2}z).I_o(z) + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2})^{2m} z^{2m}}{(m!)^2} \psi(m+1)$$

avec : $\psi(1) = -\gamma E$, $\quad \psi(m+1) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots \frac{1}{m} - \gamma E$

γE = Constante d'Euler = 0,5772157

* *
*

APPENDICE C

DETERMINATION DE I(ξ)

La détermination de I(ξ) à l'aide des fonctions J(z,z') et M(z,z') étant assez longue, nous ne donnons ici que l'essentiel du calcul.

Notons tout d'abord que $J(z,z') = J(z',z) = J^*(-z,-z')$ et de même pour M(z,z').

Lorsque $z > z' > 0$ nous avons [25] :

$$J(z,z') = \frac{1}{4}i\pi(z+z')e^{-(z-z')} + zz'K_1(z)\left[K_1(z') - i\pi I_1(z')\right]$$

$$M(z,z') = \frac{i\pi}{144}(z^2+z'^2-10zz'+15z-15z'+15)(z+z')e^{-(z-z')}$$

$$+ \frac{8}{9}zz'K_1(z)\left[K_1(z')-i\pi I_1(z')\right]+\frac{4}{9}zz'^2K_1(z)\left[K_o(z')+i\pi I_o(z')\right]$$

$$+ \frac{4}{9}z^2z'K_o(z)\left[K_1(z')-i\pi I_1(z')\right]+\frac{2}{9}z^2z'^2K_o(z)\left[K_o(z')+i\pi I_o(z')\right]$$

Le principe du calcul est d'exprimer les intégrales entrant dans I(ξ) à l'aide de J, M et de leurs dérivées.

Ainsi :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dv \frac{\cos uv}{(1+v^2)^{3/2}} \int_{-\infty}^{v} dy \frac{\sin[u(v-y)]}{(1+y^2)^{3/2}} = Im\left[J(2u,u)+J(0,u)\right] \text{ avec } u>0$$

$$\text{soit} \qquad = \pi u e^{-u} - 2u^2K_1(2u).\pi I_1(u)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dv \frac{\cos uv(1+vy)}{(1+v^2)^{5/2}} \cdot \int_{-\infty}^{v} dy \frac{\sin[u(v-y)]}{(1+y^2)^{5/2}} = \frac{1}{2}Im\left[K(2u,u)+K(0,u)\right.$$

avec $$K(z,z') = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dv e^{izv}}{(1+v)^{5/2}} \int_{-\infty}^{v} dy \frac{e^{-iz'y}}{(1+y^2)^{3/2}} (1 + vy)$$

$$K(z,z') = AX(z,z') + BX(z,z')$$

$$AX = \left(1 - \frac{\partial^2}{\partial z'^2}\right) M(z,z') , \qquad BX = \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z'} AX$$

- $z > z' > 0$:

$$K(z,z') = \frac{i\pi z'}{3} e^{-(z-z')} + \frac{4}{3} z z' K_1(z) \left[K_1(z') - i\pi I_1(z')\right]$$
$$+ \frac{2}{3} z^2 z' K_0(z) \left[K_1(z') - i\pi I_1(z')\right]$$
$$+ \frac{2}{3} z' z^2 K_1(z) \left[K_0(z') + i\pi I_0(z')\right]$$

- $z > z' > 0$:

$$K(z,z') = \frac{i\pi z' e^{(z-z')}}{3} + \frac{4}{3} z z' K_1(z') \left[K_1(z) - i\pi I_1(z)\right]$$
$$+ \frac{2}{3} z' z^2 K_1(z') \left[K_0(z) + i\pi I_0(z)\right]$$
$$+ \frac{2}{3} z^2 z' \left[K_1(z) - i\pi I_1(z)\right] K_0(z')$$

$$\frac{Im}{2}\left[K(2u,u) + K(0,u)\right] = \left[\frac{\pi u e^{-u}}{3} - \frac{4}{3} u^2 K_1(2u) \pi I_1(u)\right.$$
$$\left. - \frac{4u^3}{3} K_0(2u) \pi I_1(u) + \frac{4}{3} u^3 K_1(2u) \pi I_0(u)\right]$$

et $$K_1(u) \int_{-\infty}^{+\infty} dv \frac{\cos uv}{(1+v^2)^{5/2}} \left[(v^2-2) F_1(u,v) - 3v F_2(u,v)\right]$$

$$= 2\pi u^2 K_1(u) \left[K_1(2u) I_1(u) + 2u I_1(u) K_0(2u) - 2u K_1(2u) I_0(u)\right]$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dv \frac{\sin uv}{(1+v^2)^{3/2}} \cdot \int_{-\infty}^{v} y \frac{\sin[u(v-y)]}{(1+y^2)^{3/2}} = Im\left[T(2u,u) - T(0,u)\right]$$

$$T(z,z') = \frac{\partial}{\partial z'} J(z,z')$$

$$Im\left[T(2u,u) - T(0,u)\right] = \pi u e^{-u} - 2u^2 \pi K_1(2u) I_0(u)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dv \sin uv}{(1+v^2)^{5/2}} \int_{-\infty}^{v} dy \frac{\sin[u(v-y)](v-y)}{(1+y^2)^{3/2}} = \mathrm{Im}\Big[S(2u,u)-S(0,u)\Big]$$

$$S(z,z') = -\frac{1}{2}\Big[\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z'}\Big]AX(z,z')$$

$$\mathrm{Im}\Big(S(2u,u) - S(0,u)\Big) = \frac{2\pi}{3}\Big[-ue^{-u} + 2u^2K_1(2u)I_0(u)$$

$$+ 2u^3K_0(2u)I_0(u) - 2u^3K_1(2u)I_1(u)\Big]$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dv \sin uv}{(1+v^2)^{5/2}} \int_{-\infty}^{v} dy \frac{\sin[u(v-y)]}{(1+y^2)^{3/2}}[3v - (1-2v^2)y]$$

$$= 4u^3K_0(2u)\pi I_0(u) - 4\pi u^3K_1(2u)I_1(u)$$

D'où :

$$-K_1(u)\int_{-\infty}^{+\infty} dv \frac{\cos uv}{(1+v^2)^{5/2}}\Big[(v^2-2)F_1(u,v)-3vF_2(u,v)\Big]$$

$$+ K_0(u)\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin uv}{(1+v^2)^{5/2}}\Big[3vF_1(u,v) - (1-2u^2)F_2(u,v)\Big]$$

$$= 2\pi u^2\Big[-K_1(u)K_1(2u)I_1(u) + 2u[K_0(u)K_0(2u)I_0(u) - K_0(u)K_1(2u)I_1(u)]$$

$$- K_1(u)K_0(2u)I_1(u) + K_1(u)K_1(2u)I_0(u)\Big]$$

$$= G(\xi)$$

$$I(\xi) = \int_{\xi}^{\infty} G(\xi)d\xi \quad \text{qui peut se mettre sous la forme :}$$

$$I(\xi) = 2\pi\Big[K_1(2\xi)\Big(K_0(\xi)I_0(\xi) - K_1(\xi)I_1(\xi)\Big) + \int_{\xi}^{\infty} K_1(2u)K_1(u)I_1(u)du\Big]$$

qui est le résultat annoncé en (8.5).

* *
*

CONCLUSION

Nous avons donc dans ce travail donné quelques améliorations pour le calcul du pouvoir d'arrêt en supposant que celui-ci peut s'écrire :

$$\frac{dE}{dx} = \sum_i \alpha_i + \sum_i \beta_i + \gamma$$

γ : contribution des électrons libres dans l'approximation d'un fluide homogène avec contribution négligeable des ions

α_i : contribution des ions, non négligeable seulement à $E \to 0$

β_i : contribution des électrons liés sans écrantage des électrons libres.

Pour γ, le résultat est donné dans le cadre de l'A.P.A. pour toutes valeurs de T^e et $\frac{v}{v_{THe}}$, ce qui est un résultat nouveau et important en fusion inertielle où l'A.P.A. couvre une grande partie du domaine de densité et température.

Pour β_i, nous avons simplifié et amélioré, pour les éléments légers, le calcul du terme en Z^3 qui rend compte partiellement de la différence entre 4 $\frac{dE}{dx}$ pour un proton et $\frac{dE}{dx}$ pour une particule α de vitesse égale.

De notre point de vue, l'amélioration la plus importante à considérer pour ce travail est de rapprocher électrons libres et électrons liés. C'est-à-dire de tenir compte des ions et de l'écrantage des électrons liés sur γ et de l'écrantage des électrons libres sur β_i.

Pour l'application à la fusion inertielle de nombreux problèmes relatifs au pouvoir d'arrêt doivent être encore étudiés. Parmi ceux-ci citons par exemple l'interaction ion-plasma en pré-

sence d'un champ magnétique constant, l'interaction entre une molécule et un plasma, une meilleure connaissance pour des ions lourds incidents de la variation de leur charge au cours de leur ralentissement, l'effet de l'inhomogénéité macroscopique du plasma d'ablation et une bonne connaissance de l'état d'ionisation du plasma à dégénérescence nulle.

Néanmoins, prenant pour $\gamma\ \varepsilon(q,\omega)_{A.P.A.}$ à toutes températures et en intégrant dans β_i les termes en Z^3 nous avons donné et calculé pour le pouvoir d'arrêt l'expression la plus générale et la plus précise existant actuellement pour une vitesse incidente arbitraire.

* *
*

BIBLIOGRAPHIE

[1] D.PINES, P.NOZIERES, The Theory of Quantum Liquids, Vol.I (1966), W.A.Benjamin, Inc.

[2] E.G.HARRIS dans Advances in Plasma Physics, Vol.3 (1969) édité par A.Simon et W.B.Thompson

[3] J.LINDHARD, Mat.Fys.Medd. 28 n° 8 (1954)

[4] B.D.FRIED, S.D.CONTE, The plasma dispersion function (1961) Academic Press

[5] C.GOUEDARD, Thèse de 3ème cycle de l'Université de Paris Sud Orsay (1977)

[6] C.GOUEDARD et C.DEUTSCH, Journal of Math.Phys. 19, 32 (1978)

[7] P.WYNN, Proc.Kon.Ned.Akad.V.Wetensch. Amsterdam A65, p.127 (1962)

[8] G.NEMETH, Á.Ág et Gy Páris, Journal of Math.Phys. 22, 1192 (1981)

[9] R.M.MAY, Aust.J.Phys. 22, 687 (1969)

[10] J.LINDHARD, A.WINTHER, Mat.Fys.Medd. 34 n° 4 (1964)

[11] S.SKUPKY, Phys.Rev.A, 16, 727 (1977)

[12] N.R.ARISTA, W.BRANDT, Phys.Rev. A23, 1898 (1981)

[13] N.R.ARISTA, W.BRANDT dans référence [17]

[14] S.SKUPKY, Phys.Rev.Letters, 44, 1760 (1980)

[15] V.S.NIKOLAEV, I.S.DMITRIEV, Phys.Letters, 28A, 277 (1968)

[16] H.L.BERK, Phys. of Fluids, 7, 257 (1964)

[17] Informal Workshop on the penetration of charged particles in matter under extreme conditions (N.Y. University, Janvier 1980)

[18] W.KOHN, L.J.SHAM, Phys.Rev. 140, 1133 (1965)

[19] F.PERROT, Phys.Rev. A20, 586 (1979)

[20] J.C.ASHLEY, R.H.RITCHIE, W.BRANDT, Phys.Rev. B5, 2393 (1972)

[21] J.D.JAKSON, R.L.Mac CARTHY, Phys.Rev. B6, 4131 (1972)

[22] A.E.S.GREEN, D.L.SELLIN, A.S.ZACHOR, Phys.Rev. 184, 1 (1969)

[23] J.W.DAREWYCH, A.E.S.GREEN et D.L.SELLIN, Phys.Rev. A3, 502 (1971)

[24] J.LINDHARD, M.SCHARFF, Mat.Fys.Medd. 27, n° 5 (1953)

[25] C.DEUTSCH, S.KLARFELD, Phys.Rev. A7, 2081 (1973)

[26] G.N.WATSON, A treatise on the theory of Bessel functions, seconde édition (1958), Cambridge University Press

[27] T.A.MEHLHORN, Rapport SAND80-0038 (Sandia Laboratories)

[28] S.P.AHLEN, Rev.of Modern Phys. 52, 121.

* *
*